ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, Th. v. KÁRMÁN-Aachen, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen, H. REISSNER-Charlottenburg, R. RÜDENBERG-Berlin

INHALT:



...angew. Mathem. u. Mech. / Berlin, April 1930 / Band 10 / Nr. 2 / Seite 105–208

...VERLAG G.M.B.H., BERLIN NW 7 ... BEZUGSBEDINGUNGEN UND ANZEIGEN

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 10 **April 1930** **Heft 2**

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Wärmeübergang, Diffusion und Verdunstung.

Von **WILHELM NUSSELT** in München.

Obwohl die Gleichheit der Differentialgleichungen für den Vorgang der Wärmeleitung und den der Diffusion schon lange bekannt ist, hat sie doch erst vor kurzem Anwendung auf technische Probleme gefunden. Im Jahre 1916 habe ich gezeigt[1]), daß die Schnelligkeit der Verbrennung der Kohle auf dem Rost von der Geschwindigkeit abhängt, mit der der Sauerstoff der Verbrennungsluft aus dem Gaskern nach der Oberfläche der Kohle hindiffundiert. Die oben angeführte Gleichheit habe ich dann dazu benutzt, um diese nach der Kohlenoberfläche diffundierende Sauerstoffmenge aus dem Wärmeübergang zwischen Gasstrom und Kohlenoberfläche zu berechnen. 1921 hat dann H. Thoma[2]) den umgekehrten Weg eingeschlagen. Er benutzte Diffusionsversuche zur Bestimmung von Wärmeübergangszahlen. Neuerdings ist dieses Verfahren von Lohrisch[3]) nach der experimentellen Seite weiter ausgebaut worden. Eine technisch sehr wichtige Anwendung der Gleichheit von Wärmeübergang und Diffusion läßt sich beim Kühlturm machen, da hier beide Vorgänge gleichzeitig auftreten. Eine daraus folgende Beziehung wurde von Lewis[4]) aufgestellt und von Robinson[5]), Merkel[6]) und Wolff[7]) geprüft.

Im folgenden wird gezeigt, daß die in obigen Arbeiten verwendeten Gleichungen für den Zusammenhang zwischen der durch Diffusion ausgetauschten Gasmenge und der durch Leitung übertragenen Wärmemenge durch genauere ersetzt werden müssen.

Ein fester Körper von der überall gleichen Oberflächentemperatur T_w werde durch einen Luftstrom gekühlt, dessen Geschwindigkeit w_0 und dessen Temperatur T_0 seien.

---

[1]) W. Nußelt, Die Verbrennung und die Vergasung der Kohle auf dem Rost. Z. d. V. d. I. 1916 S. 102.

[2]) H. Thoma, Hochleistungskessel. Berlin, Springer 1921.

[3]) Lohrisch, Bestimmung von Wärmeübergangszahlen durch Diffusionsversuche, Dissertation München 1928.

[4]) Lewis, The Evaporation of a Liquid into a Gaz. Mechanical Engineering 1922 S. 445.

[5]) Robinson, The Design of Cooling Towers. Mechanical Engineering 1923 S. 99.

[6]) Merkel, Verdunstungskühlung. Forschungsarbeiten, herausgegeben vom VdI, Heft Nr. 275 (1925).

[7]) Wolff, Untersuchungen über die Wasserrückkühlung in künstlich belüfteten Kühlwerken. München, Oldenbourg 1928.

Nach Fourier strömt dann in der Zeit dt durch ein Flächenelement dF im Luftstrom in der Richtung n senkrecht zum Flächenelement die Wärme

$$d^2 Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF\,dt \qquad (1).$$

Hierin ist $\frac{\partial T}{\partial n}$ das augenblickliche Temperaturgefälle an der Fläche in Richtung der Normalen und λ die Wärmeleitzahl der Luft. Wendet man diese Formel auf ein Raumelement im Gasstrom an, so ergibt sich die folgende Differentialgleichung für das Temperaturfeld im Luftstrom:

$$\gamma c_p \frac{dT}{dt} = \lambda \nabla^2 T \qquad (2).$$

Hierin ist[1]:

γ das spezifische Gewicht der Luft,
c_p die spezifische Wärme der Gewichtseinheit und
λ die Wärmeleitzahl der Luft.

Dazu treten für die Geschwindigkeitskomponenten u, v und w die Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen.

Beim Diffusionsproblem kann die Luft angenähert als einheitlicher Körper betrachtet werden, da das Molekulargewicht von ihren Bestandteilen Stickstoff und Sauerstoff wenig verschieden ist. Der Luft werde nun das diffundierende Gas, z. B. Ammoniak oder Wasserdampf beigemischt. Seine Konzentration an einer beliebigen Stelle im Luftstrom sei c, d. h. in 1 m³ Luft sind c kg z. B. Ammoniak enthalten. Beim Modellversuch von Thoma wird die Oberfläche des festen Körpers aus Fließpapier gebildet, das mit konzentrierter Phosphorsäure getränkt ist. Von dieser wird das Ammoniak sehr lebhaft absorbiert, so daß dort der Partialdruck und damit die Ammoniakkonzentration sehr gering sind. Im Kühlturm geht der Diffusionsstrom von den Wassertröpfchen aus. Der Dampfdruck und damit die Wasserdampfkonzentration ist dann an der Oberfläche der Tropfen von der Wassertemperatur abhängig. Ist p_w der Partialdruck des Diffusionsgases an der Oberfläche des Körpers und p_0 der im Luftstrom, so bewirkt die Partialdruckdifferenz $p_w - p_0$ den Diffusionsstrom.

Ist nun wieder n die laufende Koordinate auf der Normalen zum Flächenelement dF, so diffundiert nach dem Grundgesetz der Diffusion von Fick die Dampfmenge

$$d^2 G_1 = -k \frac{\partial c}{\partial n} dF\,dt \qquad (3)$$

durch die Fläche dF hindurch. In dieser Gleichung ist

c die Dampfkonzentration (kg m⁻³),
$\frac{\partial c}{\partial n}$ das Gefälle der Dampfkonzentration senkrecht zur Fläche und
k die Diffusionszahl (m² s⁻¹).

Betrachtet man im Luftstrom ein Raumelement, so findet zwischen ihm und der Umgebung ein Dampfaustausch teils durch Diffusion und teils durch Strömung statt. Dies führt zu der Differentialgleichung

$$\frac{dc}{dt} = k \nabla^2 c \qquad (4).$$

Die Uebereinstimmung der Gl. (1) und (3) bzw. (2) und (4) ist sofort zu erkennen. Bei der Berechnung des Temperaturfeldes aus dem Diffusionsfeld oder umgekehrt kommt es nun aber auch auf die Gleichheit der Grenzbedingungen an. Den Temperaturen T_w und T_0 beim Wärmeübergang entsprechen die Gaskonzentrationen c_w und c_0 bei der Diffusion. Aber während beim Wärmeübergang an der Oberfläche des gekühlten Körpers die Gasgeschwindigkeit null ist, ist bei der Diffusion dort eine endliche Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Körperoberfläche vorhanden. Man erkennt das leicht, wenn

[1] Hier und im folgenden bedeuten die Symbole für Größen, die von der Zeit t und den drei Koordinaten x, y, z abhängen, wie z. B. T

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}, \qquad \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

u, v und w sind darin die Geschwindigkeitskomponenten in den Achsrichtungen.

man den eindimensionalen Diffusionsvorgang in einem Rohr im stationären Zustand betrachtet. Ein l m langes Rohr sei z. B. mit Luft und Ammoniak gefüllt. Nimmt man nun an, daß durch versuchstechnische Maßnahmen an den Enden des Rohres das Ammoniak auf verschiedener, aber jeweils konstanter Konzentration gehalten wird, so diffundiert in der einen Richtung durch das Rohr die Ammoniakmenge G_1 kg h^{-1} und in der andern die Luftmenge G_2. Ist x die laufende Koordinate, c_1 die Ammoniak- und c_2 die Luftkonzentration, so ist

$$G_1 = -k_1 \frac{d c_1}{d x} \quad \ldots \quad (5) \quad \text{und} \quad G_2 = k_2 \frac{d c_2}{d x} \quad \ldots \ldots \quad (5\,a).$$

k_1 und k_2 sind hierin die Diffusionszahlen. Führt man die Partialdrücke p_1 und p_2 des Ammoniaks und der Luft ein, so kann man auch schreiben:

$$G_1 R_1 T = -k_1 \frac{d p_1}{d x} \quad \ldots \quad (6) \quad \text{und} \quad G_2 R_2 T = k_2 \frac{d p_2}{d x} \quad \ldots \ldots \quad (6\,a).$$

Die Integration der Gl. (6) und (6a) gibt

$$G_1 R_1 T = -k_1 p_1 + C_1 \quad \ldots \quad (7) \quad \text{und} \quad G_2 R_2 T = k_2 p_2 + C_2 \quad \ldots \quad (7\,a),$$

also einen linearen Verlauf der Partialdrücke. Wenn man nun von einem Einfluß der Schwerkraft absieht, so ist der Gesamtdruck p_0 im Rohr konstant. Es ist also

$$p_1 + p_2 = p_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Aus den Gl. (7) und (7 a) folgt dann

$$k_1 = k_2 = k \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

und

$$G_1 R_1 T = G_2 R_2 T = V p_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10),$$

d. h. bezogen auf den Gesamtdruck diffundiert in beiden Richtungen das gleiche Volumen. Außerdem ist mit den Bezeichnungen der Abb. 1

$$V = \frac{k}{l}(p_1' - p_1'') = \frac{k}{l}(p_2'' - p_2') \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

und

$$G_1 = \frac{k}{l}(c_1' - c_1'') \quad \ldots \quad (12) \quad \text{bzw.} \quad G_2 = \frac{k}{l}(c_2'' - c_2') \quad \ldots \quad (12\,a).$$

Bei diesem Beispiel ändern sich also Partialdruck und Konzentration des Ammoniaks linear längs der Rohrachse. Anders liegen nun die Verhältnisse beim Diffusionsversuch von Thoma und beim Kühlturm. Auf das Rohr übertragen ändert sich die Grenzbedingung an einem Rohrende. Verschließt man das eine Rohrende mit Fließpapier, welches mit Phosphorsäure getränkt ist, so hat man den Fall des Thomaschen Modellversuches übertragen auf die lineare Diffusion, oder schließt man das Rohrende und bedeckt diesen Boden mit Wasser, so hat man entsprechende Verhältnisse wie beim Kühlturm. Mit dieser Anordnung haben auch Stefan und Winkelmann die Diffusionszahl k für die Diffusion des Wasserdampfes in Luft bestimmt. Es wird nun gezeigt, daß hier beim stationären Diffusionsstrom kein linearer Verlauf des Partialdruckes längs der Rohrachse vorhanden ist. Es diffundieren Luft und Ammoniak bzw. Wasserdampf wieder entgegengesetzt. Da aber jetzt das eine Rohrende für Luft undurchlässig ist, kann im Rohr längs der Achse kein Transport von Luft stattfinden. Infolge des Partialdruckgefälles der Luft muß in der Achsrichtung Luft diffundieren. Diesem molekularen Lufttransport muß ein konvektiver Lufttransport entgegenwirken, d. h. es muß eine fühlbare Gasströmung in Richtung der Rohrachse stattfinden. Sie werde mit u bezeichnet. Es gilt dann für die Luftströmung die Gleichung

RA 980 Z 1

Abb. 1.

$$G_2 = 0 = u\, c_2 + k \frac{d c_2}{d x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

oder nach Einführung des Partialdruckes

$$u p_2 = -k \frac{d p_2}{d x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (13a).$$

Für die Strömung des Ammoniaks gelten die entsprechenden Gleichungen

$$G_1 = u c_1 - k \frac{d c_1}{d x} \quad \ldots \ldots (14) \quad \text{und} \quad G_1 R_1 T = u p_1 - k \frac{d p_1}{d x} \quad \ldots (14a).$$

Nun ist wieder

$$p_1 + p_2 = p_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8).$$

Damit folgt aus Gl. (13a) und (14a)

$$u = -\frac{k}{p_0 - p_1} \frac{d p_1}{d x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15).$$

Setzt man diesen Wert von u in die Gl. (14a) ein, so erhält man für den Partialdruck des Ammoniaks die Gleichung

$$G_1 R_1 T = -\frac{k p_0}{p_0 - p_1} \frac{d p_1}{d x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14b),$$

deren Lösung mit der Grenzbedingung $p_1 = p_1'$ für $x = 0$

$$\frac{p_0 - p_1}{p_0 - p_1'} = e^{\frac{G_1 R_1 T}{k p_0} x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

lautet. Es ist also hier kein linearer Verlauf des Partialdruckes längs der Rohrachse vorhanden, sondern ein logarithmischer. Mit $p_1 = p_1''$ für $x = l$ wird

$$G_1 = \frac{k p_0}{R_1 T l} \ln \frac{p_0 - p_1''}{p_0 - p_1'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (17).$$

Diese Gleichung, die schon von Stefan[1]) aufgestellt wurde, zeigt, daß die durch das Rohr diffundierende Gasmenge nicht mehr dem Gefälle des Partialdruckes proportional ist. Erst wenn p_1 gegen p_0 klein ist, gilt wieder

$$G_1 = \frac{k}{R_1 T} \frac{p_1' - p_1''}{l} = k \cdot \frac{c_1' - c_1''}{l} \quad \ldots \ldots \ldots (18).$$

Aus Gl. (15) und (16) folgt noch

$$u = G_1 \frac{R_1 T}{p_0} = V_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19),$$

d. h. die Gasgeschwindigkeit u ist gleich dem pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit des Rohrquerschnittes strömenden Ammoniakvolumen beim Gesamtdruck p_0 gemessen. Hydrodynamisch sind also beim Ammoniakproblem an der festen Wand Senken von der Ergiebigkeit u vorhanden, und entsprechend bei der Verdunstung des Wassers Quellen. Da beim Wärmeübergang dort die Geschwindigkeit null herrscht, ist eine genaue Aehnlichkeit zwischen Wärmeübergang und Diffusion beim Modellversuch von Thoma nicht vorhanden. Nur bei sehr kleinen Werten von G_1, also kleinen Partialdrücken des Ammoniaks, kann $u = 0$ gesetzt werden. Erst dann ist auch Aehnlichkeit der Grenzbedingungen vorhanden. Dies soll im folgenden vorausgesetzt werden. Die Aehnlichkeit verlangt aber auch die Gleichheit der hydrodynamischen Gleichungen. Beim Modellversuch von Thoma ist beim Diffusionsversuch die Temperatur überall gleich, beim Wärmeübergang ist sie verschieden. Hier ändert sich also die Luftdichte mit der Temperatur. Bei der Diffusion ändert sich die Gasdichte mit der Konzentration. Die Aehnlichkeit gilt also nur, wenn

$$\frac{T_w}{T_0} = \frac{\gamma_w}{\gamma_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (20)$$

ist. Hierin ist γ_w bzw. γ_0 die Dichte des Ammoniakluftgemisches an der Wand bzw. im freien Gasstrom. Auch die Veränderlichkeit der Zähigkeit mit Temperatur und Ammoniakkonzentration wäre noch zu berücksichtigen. Da aber, wie oben gezeigt wurde, eine Aehnlichkeit überhaupt nur bei kleinen Ammoniakkonzentrationen möglich ist, gibt der Modellversuch nur Wärmeübergangszahlen bei sehr kleinen Temperaturdifferenzen.

Günstiger liegen die Aehnlichkeitsbedingungen beim Kühlturm. Hier wird eine heiße Wasseroberfläche durch einen kalten trockenen Luftstrom gekühlt. Es strömt dann Wärme vom Wasser an die Luft und gleichzeitig verdampft Wasser, das in die Luft hinein

[1]) Stefan, Versuche über die Verdampfung, Wiener Berichte 1874, Bd. 68, S. 385.

diffundiert. Hier superponieren sich also Wärmeübergang und Diffusion über denselben Strömungszustand. Zu den Gl. (2) und (4) treten dieselben hydrodynamischen Gleichungen und Grenzbedingungen.

Im folgenden werden die aus der Aehnlichkeit folgenden Beziehungen für den Thomaschen Modellversuch und für den Kühlturm abgeleitet.

I. Der Modellversuch von Thoma.

Ein Körper von der Oberfläche F und der Temperatur T_w wird von einem Luftstrom gekühlt, dessen Geschwindigkeit w_0 und dessen Temperatur T_0 sind. Die Wärmeabgabe des Körpers betrage Q kcal pro Stunde. Mit einem Körper derselben Gestalt werde nun der Diffusionsversuch ausgeführt. Der Luftstrom habe dieselbe Geschwindigkeit w_0 und sei mit Ammoniak von der Konzentration c_0 gemischt. Durch das Absorptionsmittel, mit dem die Körperoberfläche behandelt ist, werde dort die Ammoniakkonzentration auf dem Wert c_w gehalten. Auf Grund des Diffusionsversuches ergebe sich, daß die Oberfläche G kg Ammoniak pro Stunde absorbiere. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Q und G? Diese Frage werde im folgenden nach verschiedenen Theorien behandelt.

1. Aehnlichkeitstheorie [1]. Sie liefert für die ausgetauschte Wärme die Gleichung

$$Q = \lambda\, L\,(T_w - T_0)\, f\left(\frac{L\, w_0\, \gamma}{g\, \eta}, \frac{\eta\, c_p\, g}{\lambda}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (21).$$

Hierin ist

- λ die Wärmeleitzahl der Luft,
- γ deren spezifisches Gewicht,
- η ihre Zähigkeitszahl,
- c_p ihre spezifische Wärme pro Gewichtseinheit,
- L eine Dimension des Körpers,
- f eine zunächst unbekannte von der Gestalt des Körpers abhängige Funktion der beiden dimensionslosen Brüche.

Für die Diffusion gilt entsprechend

$$G = k\, L\,(c_0 - c_w)\, f\left(\frac{L\, w_0\, \gamma}{g\, \eta}, \frac{\eta\, g}{\gamma\, k}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (22).$$

Hieraus ergibt sich die gesuchte Beziehung zu

$$\frac{Q}{G} = \frac{\lambda}{k}\, \frac{f\left(\frac{L\, w_0\, \gamma}{g\, \eta}, \frac{\eta\, c_p\, g}{\lambda}\right)}{f\left(\frac{L\, w_0\, \gamma}{g\, \eta}, \frac{\eta\, g}{\gamma\, k}\right)}\, \frac{T_w - T_0}{c_0 - c_w} \quad \ldots\ldots\ldots (23).$$

Aus den meisten Versuchen folgt, daß sich die Funktion f durch ein Produkt zweier Funktionen darstellen läßt

$$f = b\left(\frac{L\, w_0\, \gamma}{g\, \eta}\right)^m \left(\frac{\eta\, c_p\, g}{\lambda}\right)^n \quad \ldots\ldots\ldots (24),$$

wobei die Konstanten von der Gestalt des Körpers abhängen. So habe ich [2] für die Strömung von Gasen durch ein zylindrisches Rohr gefunden

$$m = 0{,}786 \quad \text{und} \quad n = 0{,}85 \quad \ldots\ldots\ldots (25).$$

Zwei Gründe haben mich dann veranlaßt, die beiden Exponenten einander gleich zu setzen Nimmt man an, daß die Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt von der Dichte unabhängig ist, so sind in der Differentialgleichung der Wärmeleitung die Geschwindigkeitskomponenten u, v und w der mittleren Strömungsgeschwindigkeit w_0 proportional. In dieser Gleichung tritt dann nur der Bruch $\frac{w\, \gamma\, c_p}{\lambda}$ als Faktor auf. In der Funktion f muß dann $m = n$ sein. Da $\frac{\eta\, c_p\, g}{\lambda}$ wenig für die verschiedenen Gase im Wert schwankt, ist der Einfluß des Wertes von n auf Q gering. Deshalb wählte ich $m = n$ und erreichte dadurch eine sehr einfache Gestalt der Gleichung. Ich habe sie dann aber ausdrücklich auf Gase beschränkt, denn es schien, da die Versuche von Stanton mit Wasser für m größere Werte ergeben hatten als ich für Gase gefunden habe, daß die

[1] Nußelt, Das Grundgesetz des Wärmeüberganges, Gesundheitsingenieur 1915, S. 477.

[2] Nußelt, Der Wärmeübergang im Rohr, Forschungsarbeiten, herausgegeben vom V. d. I. Heft 89, 1910.

Potenzformel nur in einem engen Bereich für Werte von $\frac{\lambda}{\eta\, c_p\, \gamma}$ gilt. Aus neueren Versuchen von Sonnecken und Stender[1]) habe ich je nach den Versuchsbedingungen für m Werte zwischen 0,72 und 0,91 und für n solche zwischen 0,35 und 0,50 abgeleitet. Merkel[2]) gibt für dieselben Versuche $m = 0{,}87$ und $n = \frac{m}{2} = 0{,}435$ an. Rice[3]) setzt für die Strömung in glatten Rohren $m = {}^5/_6 = 0{,}83$ und $n = {}^1/_2 = 0{,}50$. Nun ist neuerdings diese Frage von Schiller und Burbach[4]) wieder aufgegriffen worden. Sie finden meine Formel für Gase mit $m = n$ auch für Wasser durch den Versuch bestätigt und begründen die Gleichheit der Exponenten auch theoretisch. Ich werde auf diese wichtige Frage an anderer Stelle nochmals zurückkommen.

Mit Gl. (24) liefert Gl. (23)

$$\frac{Q}{G} = \frac{\lambda}{k}\left(\frac{\gamma\, c_p\, k}{\lambda}\right)^n \frac{T_w - T_0}{c_0 - c_w} \quad \text{(23a)}.$$

Führt man die Wärmeübergangszahl α durch den Ansatz

$$Q = \alpha\, F\,(T_w - T_0) \quad \text{(26)}$$

ein, so wird

$$\alpha = \frac{G}{F}\,\frac{\lambda}{k}\left(\frac{\gamma\, c_p\, k}{\lambda}\right)^n \frac{1}{c_0 - c_w} \quad \text{(27)}.$$

2. Formel von Thoma-Lohrisch. Bei der Ableitung seiner Formel zur Berechnung der Wärmeübergangszahl aus dem Diffusionsversuch geht Thoma von dem Fall aus, für den die Beziehung

$$k = \frac{\lambda}{c_p\, \gamma} \quad \text{(28)}$$

besteht. Dafür gehen die beiden Differentialgleichungen (2) und (4) ineinander über. Das Temperaturfeld ist dann dem Konzentrationsfeld proportional und es besteht für die Gefälle an einer beliebigen Stelle in den Feldern die Beziehung

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial n}}{\frac{\partial c}{\partial n}} = \frac{T_0 - T_w}{c_0 - c_w} \quad \text{(29)}.$$

Aus den Gl. (1) und (3) folgt dann sofort die gesuchte Beziehung

$$\frac{Q}{G} = \frac{\lambda}{k}\,\frac{T_w - T_0}{c_0 - c_w} \quad \text{(30)},$$

die auch mit Gl. (28)

$$\frac{Q}{G} = c_p\, \gamma\, \frac{T_w - T_0}{c_0 - c_w} \quad \text{(30a)}$$

geschrieben werden kann. Führt man nach Gl. (26) die Wärmeübergangszahl α ein, so wird dafür

$$\alpha = \frac{G}{F}\,\gamma\, c_p\, \frac{1}{c_0 - c_w} \quad \text{(31)}.$$

Für den Diffusionsversuch mit Ammoniak in Luft ist aber die Gl. (28) nicht erfüllt.

Nach Thoma gilt dafür

$$\frac{\lambda}{\gamma\, c_p\, k} = 1{,}25 \quad \text{(28a)}.$$

Für diesen Fall benutzt Thoma auch die Gl. (30a) bzw. (31). Als Korrektionsfaktor multipliziert er ihre rechte Seite mit der Konstanten der Gl. (28a). Er setzt also

$$\frac{Q}{G} = \frac{\lambda}{\gamma\, c_p\, k}\cdot \gamma\, c_p\, \frac{T_w - T_0}{c_0 - c_w} \quad \text{(32)}, \quad \text{also} \quad \frac{Q}{G} = \frac{\lambda}{k}\,\frac{T_w - T_0}{c_0 - c_w} \quad \text{(32a)}$$

---

[1]) Nußelt, Die Wärmeübertragung an Wasser im Rohr, Festschrift anläßlich des 100 jährigen Bestehens der Technischen Hochschule Fridericiana zu Karlsruhe, Karlsruhe 1925, S. 366.

[2]) Merkel, Hütte, des Ingenieurs Taschenbuch, 25. Auflage, Berlin 1925, Bd. 1, S. 454.

[3]) Rice, Free and forced convection in gases and liquids II, Phys. Rew. 1924, Bd. 33, S. 306.

[4]) Schiller und Burbach, Wärmeübertragung strömender Flüssigkeit in Rohren, Phys. Zeitschr. 1928, Bd. 29, S. 340.

Damit wird

$$\alpha = \frac{G}{F} \cdot \frac{\lambda}{k} \cdot \frac{1}{c_0 - c_w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32b).$$

Die Gl. (27) geht nur in diese über, wenn $n = 0$ wäre.

Zur Begründung dieser Gl. (32b) leitet Thoma aus Aehnlichkeits- und Impulsbetrachtungen für den Wärmeübergang die Gleichung

$$Q = g\, c_p\, \eta\, L\, (T_w - T_0)\, \varphi \left(\frac{L\, w_0\, \gamma}{g\, \eta}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

ab. Schreibt man sie in der Form

$$Q = \lambda\, L\, (T_w - T_0)\, \frac{c_p\, \eta\, g}{\lambda}\, \varphi \left(\frac{L\, w_0\, \gamma}{g\, \eta}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33a),$$

so erkennt man, daß sie ein Spezialfall von Gl. (21) ist, insofern als

$$f\left(\frac{L\, w_0\, \gamma}{g\, \eta}, \frac{\eta\, c_p\, g}{\lambda}\right) = \frac{\eta\, c_p\, g}{\lambda}\, \varphi \left(\frac{L\, w_0\, \gamma}{g\, \eta}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

gesetzt ist. Aus Gl. (33) folgt

$$\alpha = \frac{g\, c_p\, \eta\, L}{F}\, \varphi \left(\frac{L\, w_0\, \gamma}{g\, \eta}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (35),$$

die auch

$$\alpha = \lambda \cdot \frac{g\, c_p\, \eta}{\lambda} \cdot \frac{L}{F}\, \varphi \left(\frac{L\, w_0\, \gamma}{g\, \eta}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (35a)$$

geschrieben werden kann. Thoma benutzt nun diese Gl. (35a), um damit aus Gl. (31) die Gl. (32b) abzuleiten. Ich kann der Schlußfolgerung von Thoma nicht folgen, denn setzt man in die Gl. (23) für die Funktion f die Thomasche Beziehung nach Gl. (34) ein, so ergibt sich

$$\frac{Q}{G} = \gamma\, c_p\, \frac{T_w - T_0}{c_0 - c_w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30a)$$

und

$$\alpha = \frac{G}{F}\, \gamma\, c_p\, \frac{1}{c_0 - c_w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31).$$

Der Thomasche Ansatz nach Gl. (34) führt also wieder zur Gl. (31) zurück und gibt nicht die von Thoma benutzte Gl. (32b).

Bisher wurde immer angenommen, daß sich die Aenderung des Feldes nur auf die Umgebung des Körpers erstreckt. Wird der ganze Strömungsquerschnitt beeinflußt, so ist eine andere Definition von α nötig. Man setzt

$$d\,Q = \alpha\, d\,F\, (T_w - T) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (36),$$

wobei T die mittlere Temperatur im Stromquerschnitt über dem Oberflächenelement des Körpers dF ist. Außerdem gilt die Gleichung

$$Q = V_0\, \gamma\, c_p\, (T_2 - T_0) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (37),$$

in der V_0 das am Körper in der Zeiteinheit vorbeistreichende Luftvolumen und $T_2 - T_0$ seine Erwärmung durch den heißen Körper ist. Aus den Gl. (36) und (37) folgt

$$\alpha = \frac{V_0\, \gamma\, c_p}{F} \ln \frac{T_w - T_0}{T_w - T_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38).$$

Setzt man

$$\frac{T_2 - T_0}{T_w - T_0} = \xi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (39),$$

so kann man auch schreiben

$$\alpha = \frac{V_0\, \gamma\, c_p}{F} \ln \frac{1}{1 - \xi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (38a).$$

Für den Diffusionsversuch ergeben sich bei der gleichen Luftmenge V_0

$$\varepsilon = \frac{c_0 - c_2}{c_0 - c_w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (40),$$

wenn c_2 die Ammoniakkonzentration der Luft hinter dem Körper ist. Für den Spezialfall 1, der die Gültigkeit der Gl. (28) voraussetzt, wäre

$$\xi = \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (41),$$

also die gesuchte Wärmeübergangszahl

$$\alpha = \frac{V_0\, \gamma\, c_p}{F} \ln \frac{1}{1 - \varepsilon} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (42).$$

Für den allgemeineren Fall nach Gl. (28a) setzen Thoma nnd Lohrisch wie oben

$$\alpha = \frac{\lambda}{\gamma c_p k} \cdot \frac{V_0 \gamma c_p}{F} \ln \frac{1}{1-\varepsilon} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (43),$$

also

$$\alpha = \frac{V_0}{F} \cdot \frac{\lambda}{k} \ln \frac{1}{1-\varepsilon} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (43a).$$

Die richtige Formel erhält man wie folgt. Man eliminiert aus den Gl. (37) und (38) die Temperatur T_2 und erhält

$$\alpha = \frac{V_0 \gamma c_p}{F} \ln \frac{1}{1 - \dfrac{Q}{V_0 \gamma c_p (T_w - T_0)}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (44).$$

Nun ist nach Gl. (23a)

$$\frac{Q}{T_w - T_0} = \frac{\lambda}{k} G \left(\frac{\gamma c_p k}{\lambda}\right)^n \frac{1}{c_0 - c_w} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23a).$$

Setzt man für

$$G = V_0 (c_0 - c_2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (45),$$

so wird

$$\frac{Q}{T_w - T_0} = \frac{\lambda}{k} V_0 \left(\frac{\gamma c_p k}{\lambda}\right)^n \cdot \frac{c_0 - c_2}{c_0 - c_w} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (46)$$

und damit nach Gl. (44) und (40)

$$\alpha = \frac{V_0 \gamma c_p}{F} \ln \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\lambda}{\gamma c_p k}\right)^{1-n} \cdot \varepsilon} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47).$$

Diese Gleichung hat also an die Stelle der Gl. (43a) von Thoma-Lohrisch zu treten. Bei den Versuchen von Thoma ist ε im Mittel 0,25. Setzt man in die Gl. (47) den Wert der Gl. (28a) ein und außerdem $n = m = 0{,}6$, so gibt die Gl. (47) einen um 11 vH kleineren Wert für α, als die Thomasche Gl. (43a).

Eine weitere Ungenauigkeit ergibt auch die Berechnung von ε nach Gl. (40). Thoma setzt hierin $c_w = 0$, indem er annimmt, daß infolge der starken Absorptionskraft der Phosphorsäure für Ammoniak dort der Partialdruck des Ammoniaks null ist. Da aber durch die Grenzschicht Ammoniak hindurch diffundieren muß, muß auch ein endlicher Dampfdruck des Ammoniaks an der Oberfläche vorhanden sein. Er kann natürlich recht klein sein, aber es ist notwendig, ihn erst einmal zu messen. Lohrisch verwendet beim Thomaschen Modellversuch auch Wasserdampf, indem er das die Körperoberfläche bildende Fließpapier mit Wasser sättigt. Bei der Berechnung von ε nimmt er an, daß an der Körperoberfläche der der Wassertemperatur entsprechende Dampfdruck herrscht. Im 2. Kapitel über die Verdunstung im Kühlturm wird gezeigt, daß der Dampfdruck an der Körperoberfläche kleiner als der Sättigungsdruck ist.

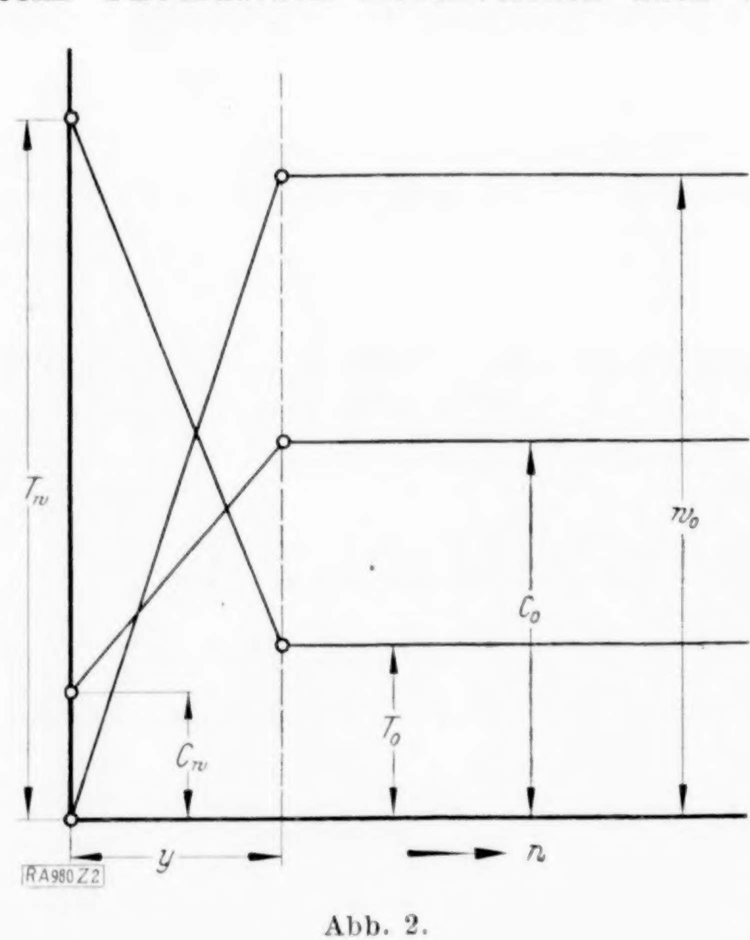


Abb. 2.

3. Die Grenzschichtentheorie. In ihrer ursprünglichen und einfachsten Gestalt wird bei ihr vorausgesetzt, daß der am Körper vorbeistreichende Luftstrom sich aus zwei scharf getrennten Teilen zusammensetzt, aus der Grenzschicht, die an die Körperoberfläche grenzt, und aus dem übrigen Flüssigkeitsstrom. Jene führt laminare Strömung, diese turbulente, die man in erster Annäherung durch eine Potentialströmung ersetzt. Man nimmt nun an, daß in dieser ein voller Ausgleich der Temperatur bzw. der Ammoniakkonzentration eintritt. Die Abb. 2 zeigt dann auf einer Normalen zur Wand die Verteilung der Temperatur T

bzw. der Konzentration c beim Wärmeübergang bzw. beim Modellversuch. Die Stärke der Grenzschicht sei y. Für den Wärmeübergang gilt dann

$$Q = \frac{\lambda F (T_w - T_0)}{y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

und für die Diffusion

$$G = \frac{k F (c_0 - c_w)}{y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (49).$$

Damit wird auf Grund der einfachen Grenzschichtentheorie

$$\frac{Q}{G} = \frac{\lambda}{k} \frac{T_w - T_0}{c_0 - c_w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (50)$$

und damit

$$\alpha = \frac{G}{F} \cdot \frac{\lambda}{k} \cdot \frac{1}{c_0 - c_w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (51).$$

Sie ist identisch mit der Thomaschen Gl. (32b) und mit der Gl. (27) für $n = 0$.

4. Die Impulstheorie. Die Impulstheorie ist eine Uebertragung gaskinetischer Vorstellungen auf die turbulente Flüssigkeitsbewegung. In ihrer einfachsten Gestalt nimmt man bei ihr zur Erklärung des Wärmeüberganges an, daß aus dem turbulenten Flüssigkeitsstrom ein Gasvolumen V mit der Temperatur T_0 auf die Wand trifft, sich dort auf die Wandtemperatur T_w erwärmt und mit dieser in den Flüssigkeitskern zurücktritt. Es nimmt also die Wärme

$$Q = V \gamma c_p (T_w - T_0) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (52)$$

an der Wand auf, um sie an die Flüssigkeit abzugeben. Damit wird

$$\alpha = \frac{V \gamma c_p}{F} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (53).$$

Das Volumen V enthält beim Diffusionsversuch c_0 kg Ammoniak. Beim Auftreffen auf die Oberfläche des Körpers wird von dieser das Ammoniak bis auf die Konzentration c_w absorbiert. Es wird also

$$G = V (c_0 - c_w) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (54).$$

Aus Gl. (52) und (54) folgt

$$\frac{Q}{G} = \gamma c_p \frac{T_w - T_0}{c_0 - c_w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (55)$$

und damit

$$\alpha = \frac{G}{F} \cdot \gamma c_p \frac{1}{c_0 - c_w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (56).$$

Diese Gleichung folgt auch aus Gl. (27) für $n = 1$.

5. Vereinigung der Grenzschichten- und Impulstheorie. Es werde nun angenommen, daß im turbulenten Kern kein voller Ausgleich von Geschwindigkeit und damit Temperatur bzw. Konzentration eintritt. An der diesem Kern zugekehrten Seite der Grenzschicht sind dann die Temperatur T_e bzw. die Konzentration c_e von T_0 bzw. c_0 verschieden. In der Grenzschicht erfolge der Austausch nach der Grenzschichtentheorie. Im freien Gasstrom gelte die Impulstheorie.

In der Grenzschicht gilt dann

$$Q = \frac{\lambda}{y} F (T_w - T_e) \quad \ldots \quad (57) \quad \text{und} \quad G = \frac{\lambda}{y} F (c_e - c_w) \quad \ldots \quad (58),$$

also

$$\frac{Q}{G} = \frac{\lambda}{k} \cdot \frac{T_w - T_e}{c_e - c_w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (59).$$

Für den turbulenten Strom ist dagegen

$$Q = V \gamma c_p (T_e - T_0) \quad \ldots \quad (60) \quad \text{und} \quad G = V (c_0 - c_e) \quad \ldots \quad (61),$$

also

$$\frac{Q}{G} = \gamma c_p \frac{T_e - T_0}{c_0 - c_e} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (62).$$

Man kann nun annehmen, daß angenähert

$$\frac{T_w - T_e}{T_w - T_0} = a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (63),$$

also gleich einer Konstanten[1]) ist. Dann wird auch

$$\frac{c_e - c_w}{c_0 - c_w} = b \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (64),$$

also gleich einer konstanten Größe. Aus Gl. (63) und (64) folgt

$$\frac{T_e - T_0}{T_w - T_0} = 1 - a \quad \ldots \quad (63\,\mathrm{a}) \quad \text{und} \quad \frac{c_0 - c_e}{c_0 - c_w} = 1 - b \quad \ldots \ldots \quad (64\mathrm{a}).$$

Damit gehen die Gl. (59) und (62) über in

$$\frac{Q}{G} = \frac{\lambda}{k} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{T_w - T_0}{c_0 - c_w} \quad \ldots \quad (59\,\mathrm{a}) \quad \text{und} \quad \frac{Q}{G} = \gamma\, c_p \frac{1-a}{1-b} \cdot \frac{T_w - T_0}{c_0 - c_w} \quad \ldots \quad (62\mathrm{a}).$$

Aus der Gleichheit der linken Seiten dieser Gleichungen folgt

$$\frac{a}{b} = a - (1-a)\frac{\gamma\, c_p\, k}{\lambda} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (65)$$

Es wird also das gesuchte Verhältnis

$$\frac{Q}{G} = \frac{\lambda}{k}\left(a + (1-a)\frac{\gamma\, c_p\, k}{\lambda}\right)\frac{T_w - T_0}{c_0 - c_w} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (66).$$

Vergleicht man diese Gleichung mit Gl. (23 a), so erkennt man, daß sie sich nur in der Funktion unterscheiden, die die Abhängigkeit vom Bruch $\frac{\gamma\, c_p\, k}{\lambda}$ angibt. Da $n > 0$ und $a \gtrless {0 \atop 1}$ ist, so geben beide eine Zunahme mit steigendem Wert von $\frac{\gamma\, c_p\, k}{\lambda}$ an. Für Gase kommt nur ein enger Bereich dieses Bruches in der Nähe von 1 in Frage. Verlangt man dort ein Zusammenfallen beider Linien, so erhält man für den Zusammenhang der beiden Konstanten

$$n = 1 - a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (67).$$

Setzt man also z. B. $n = 0{,}4$, so wird $a = 0{,}6$.

II. Die Verdunstung von Wasser.

Es ist wohl das Verdienst Stefans, zuerst erkannt zu haben, daß die Verdunstung von Wasser ein Problem der Diffusion ist. An Hand desselben entwickelte er eine Theorie der Diffusion.

Es sind bei der Verdunstung mehrere verschiedene Fälle zu unterscheiden. Betrachtet man zunächst eine ruhende Wasserfläche, die die gleiche Temperatur wie die darüber gelagerte Luft hat. Wenn die relative Feuchtigkeit der Luft kleiner wie 1 ist, so verdunstet Wasser, d. h. von der Wasseroberfläche diffundiert überhitzter Wasserdampf in die Luft hinein. Da bei gleichem Zustand der Wasserdampf leichter als die Luft ist, entsteht eine Luftströmung. Ueber dem Wasser bildet sich ein aufsteigender Luftstrom aus, der von der Seite trockene Luft zur Wasserfläche heransaugt. Dadurch wird die Verdunstung vergrößert. Bläst ein Wind über die Wasserfläche, so findet infolge der Turbulenz eine weitere Steigerung der Verdunstung statt. Ist die Wassertemperatur von der Lufttemperatur verschieden, so findet im ersten Fall eine wesentliche Beeinflussung der Verdunstung statt, weil durch den dadurch entstehenden Wärmeaustausch die Konvektion beeinflußt wird.

1. Verdunstung bei Windstille und Temperaturgleichgewicht. Ueber einer Wasseroberfläche von der Größe F und einer ausgezeichneten Dimension L lagere Luft, deren Dichte in einiger Entfernung γ_0 und deren Feuchtigkeitsgehalt c_0 sei. An der Wasseroberfläche sei der Dampfgehalt der Luft c_w. An einer Stelle über der Platte reichert sich infolge der Verdunstung die Luft mit Dampf an; sie wird leichter und erleidet dadurch einen Auftrieb Z im Betrage von

$$Z = (c - c_0)\left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (68),$$

[1]) Neuerdings gibt Prandtl dafür in einer Abhandlung »Bemerkung über den Wärmeübergang im Rohr« Phys. Ztschr. 1928, Bd 29, S. 487 den Wert

$$a = \frac{\frac{g\, c_p\, \eta}{\lambda}\, e \sqrt[8]{\frac{g\, \eta}{w_0\, d\, \gamma}}}{1 + \left(\frac{g\, c_p\, \eta}{\lambda} - 1\right) e \sqrt[8]{\frac{g\, \eta}{w_0\, d\, \gamma}}}$$

an, in dem der Beiwert e noch unsicher ist. Er liegt zwischen 1,1 und 1,75.

wenn μ das scheinbare Molekulargewicht der trockenen Luft und μ_1 das Molekulargewicht des Wasserdampfes ist. Für das Diffusionsfeld gilt dann zunächst wieder die Diffusionsgleichung (4). Für die darin vorkommenden Geschwindigkeitskomponenten gelten die Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen, von denen die in Richtung der negativen Erdschwere als äußere Kraft den Auftrieb Z nach Gl. (68) enthält und daher lautet

$$\frac{\gamma_0}{g}\frac{dw}{dt} = Z + \eta \nabla^2 w \quad \quad (69).$$

Hierin kann auf der linken Seite die Luftdichte γ_0 konstant gesetzt werden. Eine Aehnlichkeitsbetrachtung liefert für das Konzentrationsgefälle an der Wasseroberfläche die Beziehung

$$-\frac{dc}{dz} = \frac{(c_w - c_0)}{L} \cdot \Phi\left(\frac{L^3\gamma\left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right)(c_w - c_0)}{g\,\eta^2}, \frac{g\,\eta}{k\,\gamma}\right) \quad \quad (70).$$

Ist nun G die auf der Wasseroberfläche F pro Zeiteinheit verdunstende Dampfmenge, so befolgt sie die Gl. (14). Setzt man darin für u den Wert nach Gl. (19) und für c_1

$$c_w = \frac{p_w}{R\,T} \quad \quad (71), \qquad \text{so wird} \qquad G = \frac{-k\,F}{1 - \frac{p_w}{p}}\frac{dc}{dz} \quad \quad (72).$$

Hierin ist p der Gesamtdruck.

Setzt man hierin das Konzentrationsgefälle nach Gl. (70) ein, so wird die verdunstende Dampfmenge

$$G = k\frac{(c_w - c_0)\,F}{\left(1 - \frac{p_w}{p}\right)L}\,\Phi\left(\frac{L^3\gamma\left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right)(c_w - c_0)}{g\,\eta^2}, \frac{\eta\,g}{k\,\gamma}\right) \quad \quad (73).$$

2. Verdunstung bei Wind und Temperaturgleichgewicht. Ueber eine Wasserfläche ströme Wind, dessen Geschwindigkeit in einiger Entfernung vom Wasser den gleichmäßigen Wert w_0 habe. Die Luft- und Wassertemperatur sei dieselbe. Vom Einfluß der Schwerkraft kann dann, wenn die Geschwindigkeit einige m/s übersteigt, abgesehen werden. Hierfür gelten die Betrachtungen und Formeln des Abschnittes I 1). Es ist demzufolge nach Gl. (22) die verdunstende Wassermenge

$$G = k\,L\,(c_w - c_0)\,f\left(\frac{L\,w_0\,\gamma}{g\,\eta}, \frac{\eta\,g}{\gamma\,k}\right) \quad \quad (22).$$

Wenn man wie dort die Annahme macht, daß die durch die Verdunstung senkrecht zur Wasseroberfläche entstehende Geschwindigkeit u gegen die Windgeschwindigkeit w_0 vernachlässigt werden kann, kann die Funktion f der Gl. (22) aus dem entsprechenden Wärmeübergangsproblem nach Gl. (21) übernommen werden. Es liegen hier die Versuche von mir und Jürges[1]) vor. Eine elektrisch auf 50° C geheizte Kupferplatte von 0,5 m Seitenlänge wurde durch einen Luftstrom von 20° C gekühlt. Für $w > 5\ \mathrm{ms^{-1}}$ wurde für die Wärmeübergangszahl

$$\alpha = 6{,}14\, w_0^{0,78}\ \mathrm{kcal\ m^{-2}\ h^{-1}\ {}^0C^{-1}} \quad \quad (74)$$

gefunden. Daraus folgt, daß in Gl. (24) die Funktion f, wenn man $m = n$ setzt, den Wert hat

$$f = 0{,}065\left(\frac{w\,\gamma\,c_p\,L}{\lambda}\right)^{0,78} \quad \quad (75).$$

In Gl. (22) wird damit

$$f = 0{,}065\left(\frac{w_0\,L}{k}\right)^{0,78} \quad \quad (75\,a).$$

Es gilt somit für die auf einer quadratischen Wasserfläche von der Größe F m² in der Stunde verdunstende Wassermenge die Gleichung

$$G = 39\,F\left(\frac{k}{L}\right)^{0,22} w_0^{0,78}\,(c_w - c_0)\ \mathrm{kg\ h^{-1}} \quad \quad (76).$$

Hierin ist die Diffusionszahl k nach Versuchen von Mache[2])

$$k = \frac{0{,}078}{p}\left(\frac{T}{273}\right)^{1,89}\ \mathrm{m^2\ h^{-1}} \quad \quad (77),$$

worin der Gesamtdruck p in at einzusetzen ist.

[1]) Nußelt und Jürges. Die Kühlung einer ebenen Wand durch einen Luftstrom. Gesundheitsing. 1922 S. 641.

[2]) Mache, Ueber die Verdunstungsgeschwindigkeit des Wassers in Wasserstoff und Luft. Wiener Sitzungsber. 1910, Bd. 119, S. 1399.

3. Verdunstung mit Wärmeaustausch bei Windstille. Es werde jetzt angenommen, daß die Temperatur der Wasseroberfläche T_w von der Lufttemperatur T_0 verschieden sei. Es findet dann neben der Diffusion des Wasserdampfes ein Wärmeübergang statt. Beide Vorgänge sind hier durch die entstehende Luftströmung miteinander gekuppelt, insofern als der Auftrieb der Luft verursacht wird wie im Fall II 1) durch das geringere spezifische Gewicht des Wasserdampfes und außerdem durch die Erwärmung der Luft. An die Stelle von Gl. (68) im Abschnitt II 1) tritt hier für den Auftrieb Z von 1 m^3 der Wert

$$Z = \gamma_0 r (T - T_0) + (c - c_0) \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68a).$$

Hierin sind T und c Temperatur und Feuchtigkeitsgehalt an einer Stelle im Feld. γ_0 ist das spezifische Gewicht der trockenen Luft in großer Entfernung von der Wasseroberfläche bei dem dort herrschenden Zustand ($p_0\, T_0$). r ist der Ausdehnungskoeffizient der Luft

$$r = 1/T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78).$$

Für nicht zu große Uebertemperaturen kann näherungsweise

$$r = 1/T_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78a)$$

gesetzt werden. Damit wird

$$Z = \frac{\gamma_0}{T_0}(T - T_0) + (c - c_0)\left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68b)$$

der Wert der äußeren Kraft in der Bewegungsgleichung (69). Hierzu treten die Gleichung der Wärmeleitung Gl. (2) und die Differentialgleichung der Diffusion Gl. (4). Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{L^3 \gamma_0^2 (T_w - T_0)}{g \eta^2 T_0} = B, \quad \frac{\lambda}{g c_p \eta} = C, \quad \frac{L^3 \gamma_0 \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right)(c_w - c_0)}{g \eta^2} = E \text{ und } \frac{k \gamma_0}{g \eta} = D \quad (79),$$

so führt die Aehnlichkeitsbetrachtung zu den Beziehungen

$$G = k L (c_w - c_0)\, \Phi_1 (B, E, C, D) \quad (80) \quad \text{und} \quad Q = \lambda L (T_w - T_0)\, \Phi_2 (B, E, C, D) \quad (80a).$$

Hierin sind Φ_1 und Φ_2 zunächst noch unbekannte Funktionen der Größen B, E, C und D.

Bedeutend einfacher und übersichtlicher wird das Ergebnis, wenn man annimmt, daß die Gl. (28) gilt

$$k = \frac{\lambda}{c_p \gamma_0} \quad . \quad . \quad . \quad (28) \quad \text{und damit} \quad C = D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28a).$$

In diesem Falle sind T und c einander proportional. Es gilt die Gl. (29) und damit wird

$$\frac{Q}{G} = \frac{\lambda (T_w - T_0)}{k (c_w - c_0)} = \gamma_0 c_p \frac{T_w - T_0}{c_w - c_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81).$$

Die ausgetauschte Wärme und die verdampfte Wassermenge stehen also in sehr einfacher Beziehung zueinander. Setzt man in die Gl. (81) die Werte für G und Q nach Gl. (80) und Gl. (80a) ein, so wird

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81a).$$

Sie gilt nur, wenn die Gl. (28) erfüllt ist. Zur Bestimmung der Funktion Φ führt man zweckmäßig eine neue abhängig Veränderliche ein:

$$\Omega = T - T_0 + \frac{T_0}{\gamma_0}\left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right)(c - c_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82).$$

Es ergeben sich dann die Differentialgleichungen

$$\frac{\gamma_0}{g}\frac{dw}{dt} = \frac{\gamma_0}{T_0}\Omega + \eta \nabla^2 w, \quad \gamma_0 c_p \frac{d\Omega}{dt} = \lambda \nabla^2 \Omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83),$$

aus welchen durch Aehnlichkeitsbetrachtungen für das Gefälle an der Oberfläche des Wassers folgt:

$$-\frac{\partial \Omega}{\partial n} = \frac{T_w - T_0 + \frac{T_0}{\gamma_0}\left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right)(c_w - c_0)}{L} f[(B + E), C] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84).$$

Dieses Gefälle kann auch aus der Gl. (82) berechnet werden. Aus ihr folgt

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial n} + \frac{T_0}{\gamma_0}\left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right)\frac{\partial c}{\partial n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85).$$

Vernachlässigt man an der Oberfläche des Wassers die Quellengeschwindigkeit u, so gelten die Gl. (1) und (3):

$$Q = -\lambda F \frac{\partial T}{\partial n} \quad . \; . \; . \; (1) \qquad \text{und} \qquad G = -k F \frac{\partial c}{\partial n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Aus den Gl. (1), (3), (81), (84) und (85) ergibt sich

$$G = \frac{k F (c_w - c_0)}{L} f[(B+E), D] \quad \text{und} \quad Q = \frac{\lambda F (T_w - T_0)}{L} f[(B+E), C] \quad . \; (86).$$

Die zweite der Gl. (86) muß auch gelten für $c_w - c_0 = 0$, also für $E = 0$. Sie geht dann in die normale Wärmeübergangsformel über. Ist diese also bekannt, so kann damit auch die verdunstende Dampfmenge G berechnet werden.

Auf Grund der Versuche über den Wärmeübergang[1]) kann für große Werte von B/C gesetzt werden:

$$Q = C_1 \lambda \frac{F}{L} \sqrt[4]{\frac{B}{C}} (T_w - T_0) = C_1 \lambda \frac{F}{L} \sqrt[4]{\frac{L^3 \gamma^2 c_p (T_w - T_0)^5}{\lambda \eta T_0}} \quad . \; . \; . \; (87),$$

worin der Beiwert C_1 von der Gestalt und Lage gegen die Schwererichtung abhängig ist.

Mit Gl. (87) wird nun nach Gl. (86)

$$G = C_1 k \frac{F}{L} \sqrt[4]{\frac{B+E}{D}} (c_w - c_0) = C_1 k \frac{F}{L} \sqrt[4]{\frac{L^3 \gamma_0 (T_w - T_0)}{k \eta T_0} + \frac{L^3 \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right)(c_w - c_0)}{\eta k}} (c_w - c_0) \quad (88).$$

Es ist zu beachten, daß diese Gleichung zunächst nur gilt, wenn Gl. (28) erfüllt ist, also $C = D$ ist. Für k, λ, γ, η und c_p sind die Werte des Dampfluftgemisches, und zwar Mittelwerte über das ganze Feld genommen, einzusetzen. k ergibt sich aus Gl. (77). Die Wärmeleitzahl λ der Luft ist nach der von mir angegebenen Formel[2])

$$\lambda = \frac{0{,}00167 (1 + 0{,}000194\, T) \sqrt{T}}{1 + \frac{117}{T}} \text{ kcal m}^{-1}\text{ h}^{-1}\,{}^0\text{C}^{-1} \quad . \; . \; . \; . \; (89).$$

Da die Wärmeleitzahl des Wasserdampfes für den in Betracht kommenden Temperaturbereich nur wenig kleiner ist als die der Luft, so kann die Wärmeleitzahl des Dampf-Luftgemisches gleich der der Luft gesetzt werden. γ und c_p sind nach der Formel für Gasgemische zu berechnen. So wird

$$\left.\begin{array}{lcc} \text{bei} \quad t = & 0 & 50^0\,\text{C} \\ \frac{\lambda}{k \gamma c_p} = & 0{,}87 & 0{,}84 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (90).$$

Dieser Bruch ist für das Dampf-Luftgemisch von 1 verschieden. Hierfür gelten also die Gl. (80) und (80a). Da sie im Grenzfall für $C = D$ in die Gl. (87) und (88) übergehen müssen, kann man in erster Annäherung wohl allgemein schreiben

$$G = C_1 \frac{k F (c_w - c_0)}{L} \sqrt[4]{\frac{B+E}{D}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (91)$$

und

$$Q = C_1 \frac{\lambda F (T_w - T_0)}{L} \sqrt[4]{\frac{B+E}{C}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (92).$$

Es wird dann

$$\frac{G}{Q} = \frac{k}{\lambda} \sqrt[4]{\frac{C}{D}} \frac{c_w - c_0}{T_w - T_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (93)$$

oder

$$\frac{G}{Q} = \frac{k}{\lambda} \sqrt[4]{\frac{\lambda}{k c_p \gamma_0}} \frac{c_w - c_0}{T_w - T_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (94).$$

Wird im Feld der Taupunkt unterschritten, so tritt Nebelbildung ein und die Gleichungen verlieren ihre Gültigkeit.

Die Gl. (87) und damit die Gleichungen (88), (91) und (93) gelten nur bei großen Differenzen der Temperatur bzw. der Wasserdampfkonzentration. Für kleine Differenzen liegt nur eine graphische Darstellung der Funktion $f(B/C)$ vor. Aus ihr geht hervor, daß sich f für $B + E = 0$ einem konstanten Wert nähert.

[1]) Nußelt, Die Wärmeabgabe eines wagrecht liegenden Rohres oder Drahtes in Flüssigkeiten und Gasen. Z. d. V. d. I. 1929 S. 1475.

[2]) Nußelt, Das Grundgesetz des Wärmeüberganges. Gesundheitsingenieur 1915 S. 477.

Ist die Lufttemperatur T_0 größer wie die Temperatur der Wasseroberfläche T_w, so kann es bei endlichem Wert von $T_0 - T_w$ und $c_w - c_0$ vorkommen, daß $B + E = 0$ wird. In diesem Fall findet keine konvektive Strömung statt, sondern nur ein molekularer Transport von Wärme und Wasserdampf. Also für

$$B = -E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95) \quad \text{oder} \quad \frac{T_0 - T_w}{c_w - c_0} = \frac{T_0}{\gamma_0}\left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95\,a)$$

wird

$$G = C_2\, k\, L\,(c_w - c_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

und

$$Q = C_2\, \lambda\, L\,(T_0 - T_w) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

und damit

$$\frac{G}{Q} = \frac{k}{\lambda}\,\frac{c_w - c_0}{T_0 - T_w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98).$$

Der Beiwert C_2 ist von der Gestalt der Wasseroberfläche abhängig.

4. Verdunstung mit Wärmeaustausch bei Wind. Wie im Falle II (2) ströme Wind mit der Geschwindigkeit w_0 an einer Wasserfläche vorbei. Es seien aber jetzt die Wassertemperatur T_w und die Lufttemperatur T_0 verschieden. Setzt man kleine Partialdrücke des Wasserdampfes voraus, so bleiben die Gleichungen (21), (22) und (23) des Abschnittes I (1) auch hier bestehen. Da aber bei 50° C der Teildruck des Wasserdampfes bereits 0,125 ata beträgt, sind sie zu erweitern. Für die Reynoldsche Zahl werde zur Abkürzung noch gesetzt

$$\frac{L\, w_0\, \gamma_0}{g\, \eta} = \mathfrak{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79\,a).$$

Auf Grund der Aehnlichkeitstheorie gilt an der Wasseroberfläche zunächst wieder

$$-\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{T_w - T_0}{L}\, f(\mathfrak{R}, C) \quad . \quad . \quad (99) \quad \text{und} \quad -\frac{\partial c}{\partial n} = \frac{c_w - c_0}{L}\, f(\mathfrak{R}, D) \quad . \quad . \quad . \quad (99\,a).$$

Dabei ist L bei einer ebenen Wasseroberfläche, z. B. einem Teich, die Hauptabmessung und bei einem Wassertropfen sein Durchmesser. An der Wasseroberfläche besteht ferner nach Gl. (14) zwischen der verdampfenden Wassermenge und dem Konzentrationsgefälle die Beziehung

$$\frac{G}{F} = u\, c_w - k\,\frac{\partial c}{\partial n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\,a).$$

Hierin ist nach Gl. (19)

$$u = \frac{G\, R_1\, T_w}{F\, p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19\,a).$$

R_1 ist in dieser Gleichung die Gaskonstante des Wasserdampfes, und p ist der gesamte Gasdruck. Es wird damit

$$u\, c_w = \frac{G\, p_w}{F\, p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100),$$

wobei p_w der Partialdruck des Wasserdampfes an der Wasseroberfläche ist. Setzt man den Wert von Gl. (100) in die Gl. (14a) ein, so wird das Konzentrationsgefälle an der Wasseroberfläche

$$-\frac{\partial c}{\partial n} = \frac{G\left(1 - \dfrac{p_w}{p}\right)}{k\, F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101).$$

Ebenso gilt dort für den Wärmetransport

$$\frac{Q}{F} = u\, \gamma\, c_p\,(T_w - T_0) - \lambda\,\frac{\partial T}{\partial n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\,b)$$

und mit Gl. (19 a)

$$-\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{1}{\lambda\, F}\left(Q - G\,\frac{\mu}{\mu_1}\, c_p\,(T_w - T_0)\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102).$$

Aus den Gleichungen (99), (99a), (101) und (102) ergibt sich die gesuchte Beziehung zwischen Q und G zu

$$\frac{Q}{G} = \left(1 - \frac{p_w}{p}\right)\frac{\lambda\,(T_w - T_0)\, f(\mathfrak{R}, C)}{k\,(c_w - c_0)\, f(\mathfrak{R}, D)} + \frac{\mu}{\mu_1}\, c_p\,(T_w - T_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103).$$

Setzt man nun wieder für die Funktion f den Wert nach Gl. (24) ein, so wird

$$\frac{Q}{G} = \left(1 - \frac{p_w}{p}\right)\frac{\lambda}{k}\left(\frac{\gamma_0\, c_p\, k}{\lambda}\right)^n \frac{T_w - T_0}{c_w - c_0} + \frac{\mu}{\mu_1}\, c_p\,(T_w - T_0) \quad . \quad . \quad . \quad (103\,a).$$

Aus Gl. (101) und Gl. (99a) ergibt sich mit Gl. (24)

$$G = \frac{b\,k\,F\,(c_w - c_0)}{\left(1 - \frac{p_w}{p}\right)} \frac{\Re^m}{L\,D^n} \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

und damit nach Gl. (103a)

$$Q = \frac{b\,F\,(T_w - T_0)}{L} \left[\frac{\lambda}{C^n} + \frac{\mu\,c_p\,k\,(c_w - c_0)}{\mu_1 \left(1 - \frac{p_w}{p}\right) D^n}\right] \Re^m \quad . \quad . \quad . \quad (105).$$

Ist $c_w = \bar{c}_0$, so findet keine Verdunstung statt und Gl. (105) geht in Gl. (24) über.

5. Die Dampfspannung an der Wasseroberfläche. Es liegt nahe anzunehmen, daß an der verdunstenden Wasseroberfläche die Dampfspannung gleich der Sättigungsspannung ist, die zur Wassertemperatur T_w gehört, daß also $p_w = p_s$ ist. Damit wird dann die Dampfkonzentration an der Wasseroberfläche

$$c_w = \gamma'' = \frac{1}{v''} \quad . \quad . \quad . \quad (106),$$

gleich der Sättigungsdichte. Daß dem aber nicht so ist, hat schon Winkelmann[1]) vermutet und dann Mache[2]) gezeigt. Er findet auf Grund von ausführlichen Verdunstungsversuchen in einem zylindrischen Rohr, daß zwischen der verdunstenden Wassermenge und obigen Drücken die folgende Beziehung besteht

$$\frac{G}{F} = K_0\,(p_s - p_w) \quad . \quad . \quad . \quad (107),$$

d. h. der Dampfdruck über der Wasseroberfläche ist beim Verdunsten immer kleiner als der Sättigungsdruck, der zur Temperatur der Wasseroberfläche gehört. Der Beiwert K_0 ist eine Temperaturfunktion, die leider noch nicht genau fest liegt. Führt man in die Gl. (107) statt der Partialdrücke die Dampfdichte ein, so wird

$$\frac{G}{F} = \beta_1\,(c'' - c_w) \quad . \quad . \quad . \quad (108).$$

Hierin ist c'' die Sättigungskonzentration des Wasserdampfes bei der Wassertemperatur T_w. β_1 ist ein von der Temperatur abhängiger Beiwert, der nach den Versuchen von Mache die in der Zahlentafel 1 enthaltenen Werte abhängig von der Temperatur des Wassers annimmt. Leider ist gerade in dem technisch so wichtigen Temperaturbereich zwischen 0 und 50° C nur ein Versuchswert vorhanden.

Zahlentafel 1.

t_w °C	K_0 h^{-1}	β_1 mh^{-1}
92,4	0,0086	148
87,8	0,0080	133
82,1	0,0084	108
27,5	0,084	925

6. Anwendung auf das Augustsche Psychrometer. Für viele technische Anwendungen der oben entwickelten Gesetze der Diffusion ist es zweckmäßig, analog der Wärmeübergangszahl eine Verdunstungszahl einzuführen, wie ich das auch schon bei der Behandlung der Verbrennung und Vergasung der Kohle auf dem Rost getan habe. Man setzt

$$G = \beta\,F\,(c'' - c_0)\ \text{kg h}^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad (109).$$

Daraus ergibt sich die Dimension der Verdunstungszahl zu

$$[\beta] = \text{m h}^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad (110).$$

Beim Psychrometer von August findet die Verdunstung am feuchten Thermometer bei Windstille statt. Für die in der Zeiteinheit verdunstende Wassermenge gilt deshalb die Gl. (91). Führt man in sie auch eine Verdunstungszahl β_2 ein,

$$\beta_2 = C_1 \frac{k}{L} \sqrt[4]{\frac{B+E}{D}} \quad . \quad . \quad . \quad (111),$$

[1]) A. Winkelmann, Ueber die Diffusion von Gasen und Dämpfen. Ann. d. Phys. 1884, Bd. 22, S. 1.
[2]) H. Mache, a. a. O.

so geht die Gl. (91) über in

$$G = \beta_2 F (c_w - c_0) \quad \text{. . . . . (91a).}$$

Außerdem gilt für G noch die Gl. (108). Eliminiert man aus den Gl. (108) und (91a) die unbekannte Dampfkonzentration c_w, so wird die Verdunstungszahl β in Gl. (109)

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \quad \text{. . . . . (112).}$$

Vernachlässigt man den Wärmeaustausch durch den Stil des Thermometers, so lautet die Wärmebilanz des feuchten Thermometers

$$Q = G [r + c_p (T_w - T_s)] \quad \text{. . . . . (113).}$$

Hierin ist T_w die Temperatur des feuchten Thermometers und T_s die Sättigungstemperatur, die zum Partialdruck p_w des Wasserdampfes an der Oberfläche des feuchten Thermometers gehört. r ist die Verdampfungswärme beim Druck p_w und c_p die spezifische Wärme an der Grenzkurve bei demselben Druck.

Ist T_0 die Temperatur der Umgebung, die mit dem trockenen Thermometer gemessen wird, so ist die aus der Umgebung zugeführte Wärme

$$Q = \alpha F (T_0 - T_w) \quad \text{. . . . . (114).}$$

Die Wärmeübergangszahl α setzt sich hierin aus zwei Teilen zusammen, einem Summanden α_b, der die durch Wärmeleitung dem Thermometer zugeführte Wärme mißt, und einem Anteil α_s, der die Größe der Wärmestrahlung angibt. Dieser ist

$$\alpha_s = C_s \frac{\left(\frac{T_0'}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_w}{100}\right)^4}{T_0 - T_w} \quad \text{. . . . . (115).}$$

C_s ist hierin die Strahlungszahl von Wasser

$$C_s = 3{,}35 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,{}^0\text{C}^4} \quad \text{. . . . . (116).}$$

T_0' ist die mittlere Temperatur der festen Körper, die das feuchte Thermometer umgeben und mit denen es im Strahlungsaustausch steht. Sie ist wohl annähernd gleich der umgebenden Lufttemperatur T_0, aber wohl meist doch nicht ihr genau gleich. Hierin liegt eine unter Umständen nicht unwesentliche Fehlerquelle bei der Feuchtigkeitsmessung. Man kann sie mit Erfolg beseitigen, wie mir mein früherer Mitarbeiter Dipl.-Ing. Kaißling mitteilt, dadurch, daß man das feuchte Thermometer mit einem Strahlungsschutz umgibt, der ebenso wie das feuchte Thermometer selbst aus einer feuchten Oberfläche besteht.

Setzt man $T_0' = T_0$ und setzt man außerdem Zimmertemperatur voraus, so geht die Gl. (115) angenähert über in

$$\alpha_s = C_s \quad \text{. . . . . (115a).}$$

Die Wärmeübergangszahl α_b ist von den Strömungsverhältnissen in der Umgebung des Thermometers abhängig. Ist das Psychrometer in einem Raum aufgehängt, in dem die Luft ruht, so ist nach Gl. (92)

$$\alpha_b = C_1 \frac{\lambda}{L} \sqrt[4]{\frac{B+E}{C}} \quad \text{. . . . . (117),}$$

in welcher der Beiwert C_1 von der Gestalt des Thermometergefäßes abhängig ist. Für ein zylindrisches Gefäß von der Höhe H kann

$$C_1 = 0{,}83 \quad \text{. . . . . (118)}$$

gesetzt werden. In der Gl. (116) ist für L dann H zu setzen.

Ist das feuchte Thermometer einem Luftstrom ausgesetzt, so kann z. B. für ein plattenförmiges Thermometer gesetzt werden aufgrund einer von mir aufgestellten Formel[1])

$$\alpha_b = 0{,}069 \frac{\lambda}{L} \cdot \mathfrak{R}^{0,78} + 0{,}83 \frac{\lambda}{H} \sqrt[4]{\frac{B+E}{C}}\, e^{-0{,}000028\, \mathfrak{R}} \quad \text{. . . . (119).}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß der Wind horizontal am Thermometergefäß entlang streicht.

Setzt man in die Energiegleichung (113) den Wert von G nach Gl. (109) und den von Q nach Gl. (114) ein, so erhält man die folgende Psychrometerformel

$$[r + c_p (T_w - T_s)] (c' - c_0) = \left(\alpha_b + C_s\left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)\right) (T_0 - T_w) \quad \text{. . . (120).}$$

[1]) Nußelt, Die Gasstrahlung bei der Strömung im Rohr. Z. d. V. d. I. 1926, Bd 70, S. 763.

Für die Diffusionszahl an einem plattenförmigen, feuchten Thermometer ist nach Gl. (119), (111) und (117) zu setzen

$$\beta_2 = 0{,}069\ \frac{k}{L}\left(\frac{w_0\, L}{k}\right)^{0,78} + 0{,}83\ \frac{k}{H}\sqrt[4]{\frac{B+E}{D}}\ e^{-0{,}000028\left(\frac{w_0\, L}{k}\right)^{0,78}} \quad . \quad . \quad . \quad (121).$$

Die Gl. (120) gibt eine Abnahme der Psychrometerkonstanten mit zunehmender Luftgeschwindigkeit, was durch die Versuche von Edelmann, Sworykin und Recknagel gut bestätigt wird.

7. Anwendung auf die Theorie des Kühlturms. In ihm rieselt fein verteiltes warmes Wasser herab, das durch einen aufsteigenden kalten Luftstrom zu kühlen ist. Ist an einer Stelle w_0 die Relativgeschwindigkeit zwischen Wasser und Luft, so gelten für den Wärmeaustausch und die Verdunstung die Gleichungen (103), (104) und (105.) Führt man wieder die Wärmeübergargszahl α und die Verdunstungszahl β_2 gemäß den Gleichungen (26) und (92a) ein, so wird

$$\frac{\alpha}{\beta_2} = \left(1 - \frac{p_w}{p}\right)\frac{\lambda}{k}\left(\frac{\gamma_0\, c_p\, k}{\lambda}\right)^n + \frac{\mu}{\mu_1}\, c_p\,(c_w - c_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

und mit Gl. (112)

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(1 - \frac{p_w}{p}\right)\frac{\lambda}{k}\left(\frac{\gamma_0 c_p\, k}{\lambda}\right)^n + \frac{\mu}{\mu_1}\, c_p(c_w - c_0) + \frac{b\,\lambda}{\beta_1 L}\left[\left(\frac{g\, c_p\, \eta}{\lambda}\right)^n + \frac{\mu\, c_p\, k\,(c_w - c_0)}{\mu_1\,\lambda\left(1 - \frac{p_w}{p}\right)}\left(\frac{g\,\eta}{\gamma_0\, k}\right)^n\right]\mathfrak{R}^m \quad (123).$$

Auf technische Anwendungen der hier mitgeteilten Formeln wird an anderer Stelle näher eingegangen werden[1]). 980

Ein Problem aus der Windstromtheorie.

Von **JONAS EKMAN FJELDSTAD** in Bergen.

Einleitung. Eine theoretische Behandlung der winderzeugten Meeresströmungen auf hydrodynamischer Grundlage hat zuerst Zöppritz versucht. Er hatte aber die ablenkende Kraft der Erdrotation nicht berücksichtigt, und die Ergebnisse seiner Untersuchungen konnten darum mit den Beobachtungen nicht in Einklang gebracht werden. Es war darum ein großer Fortschritt als V. Walfrid Ekman[2]) auf Nansens Anregung die ablenkende Kraft der Erdrotation gebührend berücksichtigte und so eine neue Theorie der Meeresströmungen schuf, die wohl heute allgemeine Anerkennung genießt.

Ekman behandelt in seinen Untersuchungen besonders die stationären Meeresströmungen, die für die Erklärung der großen Triftströme speziell von Interesse waren. Für die nicht stationären hat er nur in einem einfachen Falle die Lösung mitgeteilt. Für seinen Zweck war dies genügend, weil er nur beabsichtigte zu untersuchen, wie lange es dauerte, bis der stationäre Zustand erreicht war.

Es mag indessen von Interesse sein, auch die nicht stationären Windströme zu untersuchen, und der Zweck der vorliegenden Arbeit ist in einigen einfachen Fällen die Formeln für die Berechnung von nicht stationären winderzeugten Meeresströmungen zu geben.

Wir denken uns eine große Meeresfläche von gleichmäßiger Tiefe und ohne Dichtigkeitsdifferenzen. Der Einfluß von angrenzenden Meeresströmungen und Kontinenten soll außer Betracht gesetzt werden, wir nehmen darum an, daß sich das Wasser in jeder Richtung frei bewegen kann. Endlich vernachlässigen wir die Krümmung der Erdoberfläche in dem betrachteten Gebiet und behandeln die Meeresoberfläche als Plan.

Nehmen wir an, daß ein Wind über die Meeresoberfläche weht, der über dem ganzem Gebiet von gleicher Stärke und Richtung ist; er möge jedoch eine Funktion von der Zeit sein. Das Wasser wird daducrh in Bewegung gesetzt und es ist klar, daß diese Bewegung nur horizontal verläuft, und daß sie nur von der Zeit und von der Tiefe abhängig sein kann. Die Bewegungsgleichungen des Wassers sind:

[1]) Seit der Absendung der Urschrift an die Schriftleitung am 16. 4. 1929 sind noch folgende Arbeiten erschienen: E. Schmidt, Verdunstung und Wärmeübergang, Gesundheitsing. 1929, S. 525. — R. Mollier, Das ix-Diagramm für Dampfluftgemische, Stodolafestschrift, Zürich 1929, S. 438, H. Thiesenhusen, Untersuchungen über die Wasserverdunstungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur des Wassers, der Luftfeuchtigkeit und Windgeschwindigkeit, Gesundheitsing. 1930, S. 113.

[2]) V. Walfrid Ekman: On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean-Currents. Archiv för Matematik och Fysik, Bd. 2, Nr. 11.

$$\frac{du}{dt} - 2\,\Omega_z v + 2\,\Omega_y w = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + X + \frac{\eta}{\varrho}\Delta u$$

$$\frac{dv}{dt} + 2\,\Omega_z u - 2\,\Omega_x w = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y + \frac{\eta}{\varrho}\Delta v$$

$$\frac{dw}{dt} + 2\,\Omega_x v - 2\,\Omega_y u = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + Z + \frac{\eta}{\varrho}\Delta w$$

mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\,.$$

Hier sind u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten des Wassers, $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit der Erde, η der Koeffizient der virtuellen Reibung als konstant vorausgesetzt, Δ bedeutet wie gewöhnlich $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, und ϱ ist die Dichtigkeit. Wegen der oben gemachten Bemerkungen werden $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, w alle identisch 0 und nur die zwei ersten Gleichungen kommen in Betracht. Diese reduzieren sich auf

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda\, v = \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + \lambda\, u = \nu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

wo $\lambda = 2\,\Omega_z = 2\,\omega \sin\varphi$ und $\nu = \frac{\eta}{\varrho}$ sind. ω ist die Rotationsgeschwindigkeit und φ die geographische Breite. Wir nehmen die z-Achse vertikal mit positiver Richtung nach unten.

Wenn die Oberfläche mit Eis bedeckt ist, so kommt es oft vor, daß die Eisdecke einen Widerstand leistet. Wir nehmen an, daß dieser Widerstand proportional der Geschwindigkeit ist. Die Tangentialkraft, die infolge der Reibung an der Oberfläche wirkt, hat die Komponenten $-\eta \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$ und $-\eta \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$.

Es sei jetzt T die Tangentialkraft des Windes, mit den Komponenten T_x und T_y. Die Grenzbedingungen an der Oberfläche werden dann:

$$R\,u - \eta\frac{\partial u}{\partial z} = T_x, \qquad R\,v - \eta \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = T_y, \quad \text{für} \quad z = 0\,,$$

oder wie wir schreiben können:

$$r\,u - \frac{\partial u}{\partial z} = k(t), \qquad r\,v - \frac{\partial v}{\partial z} = g(t), \quad \text{für} \quad z = 0.$$

Am Boden nehmen wir an:

$$u = 0, \qquad v = 0 \quad \text{für} \quad z = h.$$

Wir suchen jetzt eine Lösung der Bewegungsgleichungen, die diese Bedingungen befriedigt und zugleich der Bedingung

$$u = 0, \qquad v = 0 \quad \text{für} \quad t = 0.$$

Setzt man

$$u = \varphi\cos\lambda\,t + \psi\sin\lambda\,t, \qquad v = -\varphi\sin\lambda\,t + \psi\cos\lambda\,t,$$

so findet man, daß φ und ψ beide die Wärmeleitungsgleichung befriedigen müssen. Die Grenzbedingungen werden jetzt

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{für } z = h \text{ und für } t = 0$$

$$r\,\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = k(t)\cos\lambda\,t - g(t)\sin\lambda\,t, \qquad r\,\psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} = k(t)\sin\lambda\,t + g(t)\cos\lambda\,t \quad \text{für} \quad z = 0.$$

Wir haben demnach folgendes vereinfachte Problem. Gesucht wird ein Integral der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

mit den Bedingungen

$$u = 0 \quad \text{für} \quad z = h \quad \text{und für} \quad t = 0, \qquad r\,u - \frac{\partial u}{\partial z} = f(t) \quad \text{für} \quad z = 0.$$

1. Die Lösung im Falle $h = \infty$. Nehmen wir zuerst $h = \infty$, kann man den Ansatz machen

$$u = \int_0^t \frac{e^{-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}\,\mu(\tau)\,d\tau.$$

Man sieht ohne weiteres, daß die ersten Bedingungen befriedigt sind. Durch Differentiation findet man

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2\nu}\int_0^t \frac{e^{-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3}}\, z\,\mu(\tau)\,d\tau.$$

Der Grenzwert von $\frac{\partial u}{\partial z}$ für $z = 0$ ist bekanntlich

$$-\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\,\mu(t).$$

Die Oberflächenbedingung gibt dann:

$$r\int_0^t \frac{\mu(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\,\mu(t) = f(t).$$

Im Falle $r = 0$ findet man unmittelbar

$$\mu(t) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\,f(t) \quad \text{und somit} \quad u = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}\,f(\tau)\,d\tau.$$

Diese Lösung ist von Fredholm gegeben und von Ekman mitgeteilt[1]).

Wenn $r \neq 0$, kann man auch die Lösung leicht finden; setzt man

$$\mu(t) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\,f(t) - r\frac{\nu}{\pi}\int_0^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} - r\frac{\nu}{\pi}\int_0^t f(\tau)\,G(t,\tau)\,d\tau,$$

findet man

$$\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\,f(t) - r\frac{\nu}{\pi}\int_0^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} - r\frac{\nu}{\pi}\int_0^t f(\tau)\,G(t,\tau)\,d\tau$$

$$= \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\,f(t) - r\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\left(\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\,f(\tau) - r\frac{\nu}{\pi}\int_0^\tau \frac{f(s)\,ds}{\sqrt{\tau-s}} - r\frac{\nu}{\pi}\int_0^\tau f(s)\,G(\tau,s)\,ds\right)$$

und somit

$$\int_0^t f(\tau)\,G(t,\tau)\,d\tau = -r\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_0^t ds\,f(s)\int_s^t \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)(\tau-s)}} - r\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_0^t ds\cdot f(s)\int_s^t \frac{G(\tau,s)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Vertauscht man die Integrationsbuchstaben auf der rechten Seite, so sieht man, daß man für $G(t,\tau)$ folgende Gleichung haben muß:

$$G(t,\tau) = -r\sqrt{\nu\pi} - r\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_\tau^t \frac{G(s,\tau)\,ds}{\sqrt{t-s}}.$$

Diese Integralgleichung, die der Abelschen Integralgleichung analog ist, löst man leicht durch ein ähnliches Verfahren.

Man hat

$$\int_\tau^t \frac{G(s,\tau)\,ds}{\sqrt{t-s}} = -r\sqrt{\nu\pi}\int_\tau^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} - r\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_\tau^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}}\int_\tau^s \frac{G(y,\tau)\,dy}{\sqrt{s-y}}.$$

Vertauscht man in dem letzten Integral die Integrationsordnung und zugleich die Integrationsbuchstaben, findet man:

$$\int_\tau^t \frac{G(s,\tau)\,ds}{\sqrt{t-s}} = -2r\sqrt{\nu\pi}\sqrt{t-\tau} - r\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_\tau^t ds\,G(s,\tau)\int_s^t \frac{dy}{\sqrt{(t-y)(y-s)}}$$

oder

$$\int_\tau^t \frac{G(s,\tau)}{\sqrt{t-s}}\,ds = -2r\sqrt{\nu\pi}\sqrt{t-\tau} - r\sqrt{\nu\pi}\int_\tau^t G(s,\tau)\,ds.$$

[1]) L. c.

Dadurch kann man das Integral $\int_\tau^t \frac{G(s,\tau)\,ds}{\sqrt{t-\tau}}$ eliminieren und erhält dann:

$$G(t,\tau) = -r\sqrt{\nu\pi} + 2\nu r^2 \sqrt{t-\tau} + \nu r^2 \int_\tau^t G(s,\tau)\,ds.$$

Differentiiert man diese Gleichung nach t, bekommt man:

$$\frac{dG}{dt} - \nu r^2 G = \frac{\nu r^2}{\sqrt{t-\tau}}$$

und somit

$$G = -r\sqrt{\nu\pi}\, e^{\nu r^2(t-\tau)} + \nu r^2 \int_\tau^t e^{\nu r^2(t-s)} \frac{ds}{\sqrt{s-\tau}}.$$

Hierdurch ist nun das Problem gelöst.

2. Lösung im Falle endlicher Tiefe, $r=0$. Als zweites Problem setzen wir $r=0$, h endlich. Nach der allgemeinen Methode macht man den Ansatz:

$$u = \int_0^t \frac{e^{-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \mu_1(\tau)\,d\tau + \int_0^t \frac{e^{-\frac{(z-h)^2}{4\nu(t-\tau)}}(z-h)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \mu_2(\tau)\,d\tau,$$

$z=h$ ergibt

$$\int_0^t \frac{e^{-\frac{h^2}{4\nu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \mu_1(\tau)\,d\tau - 2\sqrt{\nu\pi}\,\mu_2(t) = 0, \qquad \mu_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{\nu\pi}} \cdot \int_0^t \frac{e^{-\frac{h^2}{4\nu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \mu_1(\tau)\,d\tau.$$

Dadurch erhält man weiter:

$$\int_0^t \frac{e^{-\frac{(z-h)^2}{4\nu(t-\tau)}}(z-h)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \mu_2(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\nu\pi}} \cdot \int_0^t \frac{e^{-\frac{(z-h)^2}{4\nu(t-\tau)}}(z-h)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \int_0^\tau \frac{e^{-\frac{h^2}{4\nu(\tau-s)}}}{\sqrt{\tau-s}} \mu_1(s)\,ds$$

$$= \frac{z-h}{2\sqrt{\nu\pi}} \int_0^t ds\,\mu_1(s) \cdot \int_s^t \frac{e^{-\frac{(z-h)^2}{4\nu(t-\tau)} - \frac{h^2}{4\nu(\tau-s)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3(\tau-s)}}\,d\tau.$$

Setzt man hier

$$\tau = \frac{s+ty^2}{1+y^2}, \quad d\tau = \frac{2(t-s)\,y\,dy}{(1+y^2)^2}, \quad t-\tau = \frac{t-s}{1+y^2}, \quad \tau - s = \frac{(t-s)\,y^2}{1+y^2},$$

so findet man:

$$\int_s^t \frac{e^{-\frac{(z-h)^2}{4\nu(t-\tau)} - \frac{h^2}{4\nu(t-s)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3(\tau-s)}}\,d\tau = \frac{2}{t-s}\int_0^\infty e^{-\frac{(z-h)^2}{4\nu(t-s)}(1+y^2) - \frac{h^2}{4\nu(t-s)}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}\,dy.$$

$$= 2\,\frac{e^{-\frac{(z-h)^2+h^2}{4\nu(t-s)}}}{t-s} \int_0^\infty e^{-\frac{(z-h)^2}{4\nu(t-s)}\cdot y^2 - \frac{h^2}{4\nu(t-s)}\cdot\frac{1}{y^2}}\,dy.$$

Unter dem Integralzeichen machen wir jetzt folgende Substitution:

$$y\,\frac{h-z}{2\sqrt{\nu(t-s)}} = x, \qquad dy = 2\,dx\,\frac{\sqrt{\nu(t-s)}}{h-z}.$$

Erinnert man sich, daß

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-2a}$$

ist, so findet man

$$\int_0^\infty e^{-\frac{(z-h)^2}{4\nu(t-s)}\cdot y^2 - \frac{h^2}{4\nu(t-s)}\cdot\frac{1}{y^2}}\,dy = \int_0^\infty e^{-x^2-\left[\frac{h(h-z)}{4\nu(t-s)}\right]^2\cdot\frac{1}{x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\;e^{-\frac{2h(h-z)}{4\nu(t-s)}}$$

und somit

$$\int_s^t \frac{e^{-\frac{(z-h)^2}{4\nu(t-\tau)}-\frac{h^2}{4\nu(\tau-s)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3(\tau-s)}}\,d\tau = \frac{2\sqrt{\nu\pi}}{h-z}\cdot\frac{e^{-\frac{(z-2h)^2}{4\nu(t-s)}}}{\sqrt{t-s}}.$$

Man erhält darum

$$u = \int_0^t \frac{e^{-\frac{z^2}{4\nu(t-s)}} - e^{-\frac{(z-2h)^2}{4\nu(t-s)}}}{\sqrt{t-s}}\,\mu_1(s)\,ds.$$

Daß diese Form von u die zwei ersten Bedingungen befriedigt, sieht man unmittelbar. Differentiation nach z ergibt:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2\nu}\int_0^t \frac{e^{-\frac{z^2}{4\nu(t-s)}}z}{\sqrt{(t-s)^3}}\,\mu_1(s)\,ds + \frac{1}{2\nu}\int_0^t \frac{e^{-\frac{(z-2h)^2}{4\nu(t-s)}}(z-2h)}{\sqrt{(t-s)^3}}\,\mu_1(s)\,ds.$$

$z = 0$ gibt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\,\mu_1(t) - \frac{h}{\nu}\int_0^t \frac{e^{-\frac{h^2}{\nu(t-s)}}}{\sqrt{(t-s)^3}}\,\mu_1(s)\,ds = -f(t),$$

und somit

$$\mu(t) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\,f(t) - \frac{h}{\sqrt{\nu\pi}}\int_0^t \frac{e^{-\frac{h^2}{\nu(t-s)}}}{\sqrt{(t-s)^3}}\,\mu(s)\,ds.$$

Dies ist nun wieder eine Integralgleichung mit singularem Kern. Wir setzen:

$$\mu(t) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\,f(t) - \frac{h}{\pi}\int_0^t f(\tau)\,G(t,\tau)\,d\tau.$$

Für $G(t, \tau)$ erhält man dann die Gleichung:

$$G(t,\tau) = \frac{e^{-\frac{h^2}{\nu(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3}} - \frac{h}{\sqrt{\nu\pi}}\int_\tau^t \frac{e^{-\frac{h^2}{\nu(t-s)}}}{\sqrt{(t-s)^3}}\,G(s,\tau)\,ds.$$

Diese Gleichung löst man leicht durch die Methode der sukzessiven Annäherungen. Setzt man

$$G = G_0 - G_1 + G_2 \ldots = \Sigma(-1)^n G_n,$$

so findet man

$$G_0 = \frac{e^{-\frac{h^2}{\nu(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3}},$$

$$G_1 = \frac{h}{\sqrt{\nu\pi}}\int_\tau^t \frac{e^{-\frac{h^2}{\nu(t-s)}}}{\sqrt{(t-s)^3}}\,G_0(s,\tau)\,ds,$$

$$\vdots$$

$$G_n = \frac{h}{\sqrt{\nu\pi}}\int_\tau^t \frac{e^{-\frac{h^2}{\nu(t-s)}}}{\sqrt{(t-s)^3}}\,G_{n-1}(s,\tau)\,ds.$$

Für G_1 findet man

$$G_1 = \frac{h}{\sqrt{\nu\pi}}\int_\tau^t \frac{e^{-\frac{h^2}{\nu(t-s)}-\frac{h^2}{\nu(s-\tau)}}}{\sqrt{(t-s)^3(s-\tau)^3}}\,ds.$$

Wir substituieren

$$s = \frac{t+\tau y^2}{1+y^2}, \qquad ds = -2\frac{(t-\tau)\,y\,dy}{(1+y^2)^2}, \qquad t-s = \frac{(t-\tau)\,y^2}{1+y^2}, \qquad s-\tau = \frac{t-\tau}{1+y^2},$$

dann wird

$$G_1 = \frac{2h}{\sqrt{\nu\pi}\,(t-\tau)^2}\int_0^\infty e^{-\frac{h^2}{\nu(t-\tau)}\left(2+y^2+\frac{1}{y^2}\right)}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)dy$$

$$= \frac{2h}{\sqrt{\nu\pi}}\,\frac{e^{-\frac{2h^2}{\nu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2}\cdot\left[\int_0^\infty e^{-\frac{h^2}{\nu(t-\tau)}\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)}dy + \int_0^\infty e^{-\frac{h^2}{\nu(t-\tau)}\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)}\frac{dy}{y^2}\right].$$

Vertauscht man in dem letzten Integral y durch $1/y$, so werden beide Integrale identisch. Wir erhalten demnach

$$G_1 = 2\,\frac{e^{-\frac{4h^2}{\nu(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3}}.$$

Wir werden sehen, daß man allgemein hat:

$$G_{n-1} = n\,\frac{e^{-\frac{n^2h^2}{\nu(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3}}.$$

Nehmen wir dies für G_{n-2} als richtig an, so findet man:

$$G_{n-1} = \frac{(n-1)\,h}{\sqrt{\nu\pi}}\int_\tau^t \frac{e^{-\frac{h^2}{\nu(t-s)}-\frac{(n-1)^2h^2}{\nu(s-\tau)}}}{\sqrt{(t-s)^3\,(s-\tau)^3}}\,d\,s\,.$$

Machen wir wieder die Substitution:

$$s = \frac{t+\tau y^2}{1+y^2},$$

finden wir

$$G_{n-1} = \frac{2\,(n-1)\,h}{\sqrt{\nu\pi}}\cdot\frac{e^{-\frac{[(n-1)^2+1]\,h^2}{\nu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2}\cdot\int_0^\infty e^{-\frac{h^2}{\nu(t-\tau)}\cdot\frac{1}{y^2}-\frac{(n-1)^2h^2}{\nu(t-\tau)}\cdot y^2}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)d\,y\,.$$

Es ist

$$\int_0^\infty e^{-\frac{h^2}{\nu(t-\tau)}\cdot\frac{1}{y^2}-\frac{(n-1)^2h^2}{\nu(t-\tau)}\cdot y^2}\,d\,y = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}}{(n-1)\,h}\cdot e^{-\frac{2(n-1)h^2}{\nu(t-\tau)}},$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{h^2}{\nu(t-\tau)}\cdot\frac{1}{y^2}-\frac{(n-1)^2h^2}{\nu(t-\tau)}\cdot y^2}\,\frac{d\,y}{y^2} = \int_0^\infty e^{-\frac{h^2}{\nu(t-\tau)}\cdot y^2-\frac{(n-1)^2h^2}{\nu(t-\tau)}\cdot\frac{1}{y^2}}\,d\,y = \frac{\sqrt{\nu\pi(t-\tau)}}{2\,h}\cdot e^{-\frac{2(n-1)h^2}{\nu(t-\tau)}}.$$

Dies ergibt

$$G_{n-1} = \frac{2\,(n-1)\,h}{\sqrt{\nu\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\nu\pi(t-\tau)}}{2\,h}\cdot\frac{e^{-\frac{[(n-1)^2+2(n-1)+1]\,h^2}{\nu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \frac{n\,e^{-\frac{n^2h^2}{\nu(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3}}.$$

Wir finden somit

$$G = \sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\,n\,\frac{e^{-\frac{n^2h^2}{\nu(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3}}.$$

Diese Reihe konvergiert, solange $t > \tau$ ist. Für $\mu(t)$ finden wir

$$\mu(t) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\,f(t) - \frac{h}{\pi}\int_0^t f(\tau)\left(\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\frac{n\,e^{-\frac{n^2h^2}{\nu(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3}}\right)d\,\tau\,.$$

Für u erhalten wir demnach:

$$u = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-\frac{z^2}{4\nu(t-s)}}-e^{-\frac{(z-2h)^2}{4\nu(t-s)}}}{\sqrt{t-s}}\left(f(s)-\frac{h}{\sqrt{\nu\pi}}\int_0^s f(\tau)\,\Sigma\,(-1)^n\,\frac{n\,e^{-\frac{4n^2h^2}{4\nu(s-\tau)}}}{\sqrt{(s-\tau)^3}}\,d\,\tau\right)d\,s$$

$$= \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-\frac{z^2}{4\nu(t-s)}}-e^{-\frac{(z-2h)^2}{4\nu(t-s)}}}{\sqrt{t-s}}\,f(s)\,d\,s$$

$$-\frac{h}{\pi}\int_0^t d\,\tau\,f(\tau)\int_\tau^t \frac{e^{-\frac{z^2}{4\nu(t-s)}}-e^{-\frac{(z-2h)^2}{4\nu(t-s)}}}{\sqrt{(t-s)\,(s-\tau)^3}}\left(\Sigma\,(-1)^n\,n\,e^{-\frac{4n^2h^2}{4\nu(s-\tau)}}\right)d\,s\,,$$

$$u = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_0^t f(s)\left(\Sigma\,(-1)^n\,\frac{e^{-\frac{(z+2nh)^2}{4\nu(t-s)}}-e^{-\frac{[z-2(n+1)h]^2}{4\nu(t-s)}}}{\sqrt{t-s}}\right)d\,s\,.$$

Die Aufgabe ist damit gelöst.

Die Summe unter dem Integralzeichen ist eine ϑ-Funktion, was man leicht sieht. Betrachten wir nämlich die Funktion

$$\varphi[z,(t-s)] = \frac{h}{\sqrt{\pi\nu(t-s)}}\,\Sigma(-1)^n\left(e^{-\frac{(z+2nh)^2}{4\nu(t-s)}} - e^{-\frac{[z-2(n+1)h]^2}{4\nu(t-s)}}\right),$$

so gibt eine leichte Umformung:

$$\varphi = \frac{h\,e^{-\frac{z^2}{4\nu(t-s)}}}{\sqrt{\pi\nu(t-s)}}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\frac{n^2h^2}{\nu(t-s)}}\cosh 2n\frac{hz}{2\nu(t-s)}\right).$$

Benutzen wir die bekannte Transformationsformel

$$\vartheta_2(x,q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\cdot e^{-\frac{x^2}{\log\frac{1}{q}}}\cdot\vartheta_0\left(\frac{\pi i x}{\log\frac{1}{q}}, q'\right); \quad \log q\cdot\log q' = \pi^2,$$

wo

$$\vartheta_0(x,q) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nx, \qquad \vartheta_2(x,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)x.$$

So sieht man, daß

$$\varphi = \vartheta_2\left(\frac{\pi z}{2h}, e^{-\frac{\pi^2\nu(t-s)}{h^2}}\right)$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4h^2}\nu(t-s)}\cos(2n+1)\frac{\pi z}{2h}\ \text{ist.}$$

Die Lösung kann somit in folgender Form geschrieben werden:

$$u = \frac{2\nu}{h}\int_0^t f(s)\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4h^2}\nu(t-s)}\cos(2n+1)\frac{\pi z}{2h}\right)ds.$$

3. Summierung der ϑ-Reihe durch ein bestimmtes Integral. Die gefundene Form der Lösung läßt sich nicht leicht verallgemeinern. Wir werden die ϑ-Funktion auf eine andere Form bringen, die sich leichter verallgemeinern läßt. Dies geschieht mit Hilfe des Fourierschen Integralsatzes.

Ist $F(x)$ eine Funktion, die zwischen $-\infty$ und $+\infty$ integrierbar ist, so hat man:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dq\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\cos q(x-\alpha)\,d\alpha.$$

Es sei jetzt

$$F(x) = \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{x}}}{\sqrt{x}}, \quad x \geqq 0, \qquad F(x) = 0, \quad x < 0.$$

Man hat dann

$$\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dq\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{z}}}{\sqrt{z}}\cos q(x-z)\,dz.$$

Es ist

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{z}}}{\sqrt{z}}\cos qz\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{2q}}\,e^{-\alpha\sqrt{2q}}(\cos\alpha\sqrt{2q} - \sin\alpha\sqrt{2q}),$$

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{z}}}{\sqrt{z}}\sin qz\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{2q}}\,e^{-\alpha\sqrt{2q}}(\cos\alpha\sqrt{2q} + \sin\alpha\sqrt{2q}),$$

und somit

$$\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\alpha\sqrt{2q}}\left[\cos(qx-\alpha\sqrt{2q}) + \sin(qx-\alpha\sqrt{2q})\right]\frac{dq}{\sqrt{2q}}.$$

Setzen wir

$$q = 2\nu\beta^2, \qquad \frac{dq}{\sqrt{2q}} = 2\sqrt{\nu}\, d\beta,$$

so erhalten wir

$$\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{x}}}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_0^\infty e^{-2\alpha\beta\sqrt{\nu}}\left[\cos\left(2\nu\beta^2 x - 2\alpha\beta\sqrt{\nu}\right) + \sin\left(2\nu\beta^2 x - 2\alpha\beta\sqrt{\nu}\right)\right] d\beta.$$

Setzen wir der Reihe nach

$$\alpha = \frac{z + 2nh}{2\sqrt{\nu}}, \qquad \alpha = \frac{2(n+1)h - z}{2\sqrt{\nu}}, \qquad x = t - s.$$

so finden wir:

$$\Sigma(-1)^n \frac{e^{-\frac{(z+2nh)^2}{4\nu(t-s)}}}{\sqrt{t-s}} = 2\sqrt{\frac{2\nu}{\pi}}\cdot\int_0^\infty d\beta\, \Sigma(-1)^n\, \Re\, e^{-\beta(1+i)(z+2nh) + i\left(2\nu\beta^2(t-s) - \frac{\pi}{4}\right)},$$

$$\Sigma(-1)^n \frac{e^{-\frac{(z-2(n+1)h)^2}{4\nu(t-s)}}}{\sqrt{t-s}} = 2\sqrt{\frac{2\nu}{\pi}}\cdot\int_0^\infty d\beta\, \Sigma(-1)^n\, \Re\, e^{-\beta(1+i)[(2n+1)h - z] + i\left(2\nu\beta^2(t-s) - \frac{\pi}{4}\right)},$$

und somit

$$\Sigma(-1)^n \frac{e^{-\frac{(z+2nh)^2}{4\nu(t-s)}} - e^{-\frac{(z-2(n+1)h)^2}{4\nu(t-s)}}}{\sqrt{t-s}} = \Re\, 2\sqrt{\frac{2\nu}{\pi}}\int_0^\infty e^{i\left(2\nu\beta^2(t-s) - \frac{\pi}{4}\right)}\frac{\sinh\beta(1+i)(h-z)}{\cosh\beta(1+i)h}\, d\beta.$$

Für u erhält man demnach

$$u = \Re\,\frac{4\nu}{\pi}\int_0^t ds\, f(s)\int_0^\infty \frac{\sinh\beta(1+i)(h-z)}{\beta(1+i)\cosh\beta(1+i)h}\, e^{i2\nu\beta^2(t-s)}\,\beta\, d\beta,$$

wo $\Re$ den Realteil andeutet.

Setzt man

$$\frac{\sinh\beta(1+i)(h-z)}{\beta(1+i)\cosh\beta h(1+i)} = \Phi = \varphi_1 - i\varphi_2,$$

so ist Φ ein Integral der Gleichung:

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - 2i\beta^2\Phi = 0$$

mit den Grenzbedingungen:

$$\Phi = 0 \quad \text{für} \quad z = h, \qquad -\frac{d\Phi}{dz} = 1 \quad \text{für} \quad z = 0.$$

Diese Form der Lösung läßt vermuten, daß auch eine andere Grenzbedingung befriedigt werden kann, wenn Φ durch eine andere Funktion ersetzt wird, die geeignete Grenzbedingungen befriedigt.

4. Lösung im allgemeinen Falle $r \neq 0$, h endlich. Nehmen wir an, daß die Grenzbedingungen seien:

$$r u - \frac{\partial u}{\partial z} = f(t) \quad z = 0, \qquad u = 0, \quad z = h \quad \text{und für} \quad t = 0.$$

Wir nehmen eine Funktion $\Phi = \varphi_1 - i\varphi_2$, die folgende Bedingungen befriedigt:

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - 2i\beta^2\Phi = 0, \qquad \Phi = 0 \ \text{für}\ z = h, \qquad r\Phi - \frac{d\Phi}{dz} = 1 \ \text{für}\ z = 0.$$

Man findet leicht

$$\Phi = \frac{\sinh\beta(1+i)(h-z)}{r\sinh\beta(1+i)h + \beta(1+i)\cosh\beta(1+i)h},$$

und setzt

$$u = \Re\,\frac{4\nu}{\pi}\int_0^t ds\, f(s)\int_0^\infty \Phi\, e^{i2\nu\beta^2(t-s)}\,\beta\, d\beta.$$

Daß dies nun wirklich eine Lösung ist, soll jetzt gezeigt werden.

Es ist

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Re \frac{4\nu}{\pi} \int_0^t ds\, f(s) \int_0^\infty 2 i \nu \beta^2 \Phi\, e^{2 i \nu \beta^2 (t-s)} \beta\, d\beta + \Re \frac{4\nu}{\pi} f(t) \int_0^\infty \Phi \beta\, d\beta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Re \frac{4\nu}{\pi} \int_0^t ds\, f(s) \int_0^\infty \frac{d^2 \Phi}{dz^2} e^{2 i \nu \beta^2 (t-s)} \beta\, d\beta.$$

Wir fordern jetzt, daß

$$\Re \int_0^\infty \Phi(\beta) \beta\, d\beta = 0 \text{ ist.}$$

Dann befriedigt u die Wärmeleitungsgleichung. Weiter findet man

$$r u - \frac{\partial u}{\partial z} = \Re \frac{4\nu}{\pi} \int_0^t ds\, f(s) \int_0^\infty \frac{r \sinh \beta (1+i)(h-z) + \beta (1+i) \cosh \beta (1+i)(h-z)}{r \sinh \beta (1+i) h + \beta (1+i) \cosh \beta (1+i) h} e^{2 i \nu \beta^2 (t-s)} \beta\, d\beta.$$

Hier darf man nicht ohne weiteres $z = 0$ setzen, denn das Integral hört dann auf konvergent zu sein.

Setzen wir indessen $\beta (1 + i) = \varrho$, haben wir

$$r \Phi - \frac{d\Phi}{dz} = \frac{(r+\varrho)\, e^{\varrho (h-z)} - (r-\varrho)\, e^{-\varrho (h-z)}}{(r+\varrho)\, e^{\varrho h} - (r-\varrho)\, e^{-\varrho h}} = \frac{e^{-\varrho z} - \frac{r-\varrho}{r+\varrho} e^{-\varrho (2h - z)}}{1 - \frac{r-\varrho}{r+\varrho} e^{-2\varrho h}}.$$

oder indem wir zur Abkürzung der Schreibweise $\frac{r-\varrho}{r+\varrho} = \alpha$ setzen.

$$\begin{aligned}(e^{-\varrho z} - \alpha e^{-\varrho (2h - z)}) & (1 + \alpha e^{-2 \varrho h} + \alpha^2 e^{-4 \varrho h} + \ldots) \\ &= e^{-\varrho z} + \alpha (e^{-\varrho (2h-z)} - e^{-\varrho (2h+z)}) + \alpha^2 (e^{-\varrho (4h-z)} - e^{-\varrho (4h+z)}) + \ldots,\end{aligned}$$

für $z = 0$ verschwinden alle Glieder mit Ausnahme des ersten. Es ist nun

$$\Re \int_0^\infty e^{-\beta (1+i) z + i 2 \nu \beta^2 (t-s)} \beta\, d\beta = \frac{1}{8\nu} \sqrt{\frac{\pi}{\nu}} \frac{e^{-\frac{z^2}{4\nu (t-s)}} z}{\sqrt{(t-s)^3}},$$

die übrigen Glieder kommen nicht in Betracht. Wir haben demnach

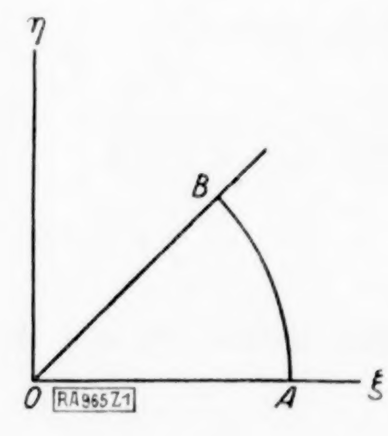
$$r u - \frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{2\sqrt{\nu \pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{z^2}{4\nu (t-s)}} z}{\sqrt{(t-s)^3}} f(s)\, ds = f(t).$$

Die Grenzbedingung für $z = 0$ ist somit erfüllt.

Dann kommt noch der Nachweis, daß $\int_0^\infty \Phi(\beta, z) \beta\, d\beta$ rein imaginär ist.

Zu diesem Zwecke betrachten wir das Linienintegral:

$$\int_L \frac{\sinh \varrho (h-z)}{r \sinh \varrho h + \varrho \cosh \varrho h} \varrho\, d\varrho,$$

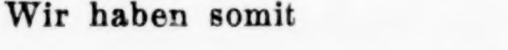


wo ϱ eine komplexe Variable, $\varrho = \xi + i\eta$, ist.

Der Integrationsweg geht von O bis A entlang der reellen Achse (siehe Abbildung), dann auf dem Kreisbogen mit Halbmesser R, bis B und von B bis O.

Auf dem so bestimmten Wege ist das Integral 0. Lassen wir den Radius R ins Unendliche wachsen, so konvergiert das Integral $\int_{AB}$ gegen 0.

Wir haben somit



$$\lim \int_{OA} = \lim \int_{OB}.$$

Auf OB setzen wir $\varrho = \beta (1 + i)$

$$d\varrho = (1+i)\, d\beta, \qquad \varrho\, d\varrho = 2 i \beta\, d\beta,$$

wir finden dann

$$\int_0^\infty \frac{\sinh \varrho (h-z) \varrho d\varrho}{r \sinh \varrho h + \varrho \cosh \varrho h} = 2i \int_0^\infty \frac{\sinh \beta (1+i)(h-z) \beta d\beta}{r \sinh \beta (1+i) h + \beta (1+i) \cosh \beta (1+i) h}$$

und

$$\int_0^\infty \Phi(\beta, z) \beta d\beta = -\frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{\sinh \varrho (h-z) \varrho d\varrho}{r \sinh \varrho h + \varrho \cosh \varrho h}.$$

Das Integral ist somit rein imaginär wie verlangt wurde.

Die gefundene Lösung ist leider für numerische Rechnungen wenig geeignet. Wir suchen darum eine Entwicklung, die der ϑ-Funktion analog ist. Zu diesem Zwecke entwickeln wir Φ in eine Fourierreihe.

Setzen wir $\varphi_n = \sin \alpha_n (h-z)$, wo α_n eine Wurzel der transzendenten Gleichung

$$\alpha_n = -r \operatorname{tg} \alpha_n h$$

ist, so ist φ_n ein Integral der Gleichung

$$\frac{d^2 \varphi_n}{dz^2} + \alpha_n^2 \varphi_n = 0$$

mit den Grenzbedingungen

$$\varphi_n = 0 \text{ für } z = h, \qquad r \varphi_n - \frac{d\varphi_n}{dz} = 0 \text{ für } z = 0.$$

Irgend zwei der Funktionen φ_n und φ_m erfüllen die Ortogonalitätsbedingung

$$\int_0^h \varphi_n \varphi_m dz = 0.$$

Weiter haben wir

$$\omega_n = \int_0^h \varphi_n^2 dz = \int_0^h \sin^2 \alpha_n (h-z) = \frac{1}{2} \int_0^h [1 - \cos 2 \alpha_n (h-z)] dz$$

oder

$$\omega_n = \frac{h}{2} \left(1 + \frac{2 \sin \alpha_n h \cos \alpha_n h}{2 r h \operatorname{tg} \alpha_n h}\right) = \frac{h}{2} \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha_n h}{r h}\right).$$

Setzen wir

$$\Phi = \Sigma a_n \varphi_n,$$

so haben wir

$$a_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^h \Phi \sin \alpha_n (h-z) dz$$

oder indem wir für Φ seinen Wert einsetzen:

$$(r \sinh \varrho h + \varrho \cosh \varrho h) \omega_n a_n = \int_0^h \sinh \varrho (h-z) \sin \alpha_n (h-z) dz$$
$$= (r \sinh \varrho h + \varrho \cosh \varrho h) \frac{\sin \alpha_n h}{\alpha_n^2 + \varrho^2}.$$

Dies ergibt

$$a_n = \frac{1}{\omega_n} \frac{\sin \alpha_n h}{\alpha_n^2 + 2 i \beta^2} = \frac{2}{h} \gamma_n \frac{1}{\alpha_n^2 + 2 i \beta^2}, \qquad \gamma_n = \frac{\sin \alpha_n h}{1 + \frac{\cos^2 \alpha_n h}{r n}}.$$

Wir finden somit

$$\int_0^\infty e^{2 i \nu \beta^2 (t-s)} \Phi(\beta, z) \beta d\beta = \frac{2}{h} \int_0^\infty e^{2 i \nu \beta^2 (t-s)} \left(\Sigma \gamma_n \left(\frac{\sin \alpha_n (h-z)}{\alpha_n^2 + 2 i \beta^2}\right)\right) \beta d\beta,$$

oder indem wir die Reihe gliedweise integrieren:

$$\frac{2}{h} \Sigma \gamma_n \sin \alpha_n (h-z) \int_0^\infty \frac{e^{2 i \nu \beta^2 (t-s)} \beta d\beta}{\alpha_n^2 + 2 i \beta^2}.$$

Da es sich nur um den Realteil handelt, kann die Integration ausgeführt werden: der Realteil des $n$ten Integrales ist

$$J_n = \int_0^\infty \frac{[\alpha_n^2 \cos 2 \nu \beta^2 (t-s) + 2 \beta^2 \sin 2 \nu \beta^2 (t-s)] \beta d\beta}{\alpha_n^4 + 4 \beta^4}.$$

Setzen wir hier $2\,\beta^2 = y$, $\beta\, d\,\beta = {}^1/_4\, d\, y$, erhalten wir

$$\frac{\alpha_n^2}{4}\int_0^\infty \frac{\cos \nu\,(t-s)\,y\,d\,y}{\alpha_n^4 + y^2} + \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{y \sin \nu\,(t-s)\,y}{\alpha_n^4 + y^2}\,d\,y.$$

Nun haben wir

$$\int_0^\infty \frac{\cos \nu\,(t-s)\,y\,d\,y}{\alpha_n^4 + y^2} = \frac{\pi}{2\,\alpha_n^2}\,e^{-\nu\,\alpha_n^2\,(t-s)},$$

$$\int_0^\infty \frac{y \sin \nu\,(t-s)\,y\,d\,y}{\alpha_n^4 + y^2} = \frac{\pi}{2}\,e^{-\nu\,\alpha_n^2\,(t-s)},$$

und somit

$$J_n = \frac{\pi}{4}\,e^{-\alpha_n^2\,\nu\,(t-s)}.$$

Tragen wir dies in die Formel für u ein, so erhalten wir:

$$u = \frac{2\,\nu}{h}\int_0^t d\,s\,f(s)\,\Sigma\,\gamma_n\,e^{-\alpha_n^2\,\nu\,(t-s)} \sin \alpha_n\,(h-z).$$

Dies ist nun die gesuchte Entwicklung. Um jetzt das ursprüngliche Problem zu lösen, setzen wir der Reihe nach

$$u = \varphi, \qquad f(s) = k(s) \cos \lambda\, s - g(s) \sin \lambda\, s,$$
$$u = \psi, \qquad f(s) = k(s) \sin \lambda\, s + g(s) \cos \lambda\, s.$$

und

$$u = \varphi \cos \lambda\, t + \psi \sin \lambda\, t, \qquad v = -\varphi \sin \lambda\, t + \psi \cos \lambda\, t,$$

wir finden dann

$$u = \frac{2\,\nu}{h}\int_0^t d\,s\,[k(s) \cos \lambda\,(t-s) + g(s) \sin \lambda\,(t-s)]\,\Sigma\,\gamma_n\,e^{-\nu\,\alpha_n^2\,(t-s)} \sin \alpha_n\,(h-z),$$

$$v = \frac{2\,\nu}{h}\int_0^t d\,s\,[-k(s) \sin \lambda\,(t-s) + g(s) \cos \lambda\,(t-s)]\,\Sigma\,\gamma_n\,e^{-\nu\,\alpha_n^2\,(t-s)} \sin \alpha_n\,(h-z).$$

Hier sind nun u und v wieder die Geschwindigkeitskomponenten. Daß u oben eine andere Bedeutung hat, gibt wohl zu keiner Verwechselung Anlaß.

Setzen wir z. B. $k(s) = T/\eta$, $g(s) = 0$, haben wir

$$u = \frac{2\,T}{\varrho\,h}\int_0^t d\,s \cos \lambda\,(t-s)\,\Sigma\,\gamma_n\,e^{-\nu\,\alpha_n^2\,(t-s)} \sin \alpha_n\,(h-z),$$

$$v = -\frac{2\,T}{\varrho\,h}\int_0^t d\,s \sin \lambda\,(t-s)\,\Sigma\,\gamma_n\,e^{-\nu\,\alpha_n^2\,(t-s)} \sin \alpha_n\,(h-z)$$

und somit

$$u + i\,v = \frac{2\,T}{\varrho\,h}\int_0^t d\,s\,\Sigma\,\gamma_n \sin \alpha_n\,(h-z)\,e^{-(\nu\,\alpha_n^2 + i\,\lambda)\,(t-s)}$$

Nun hat man

$$\int_0^t e^{-(\nu\,\alpha_n^2 + i\,\lambda)\,(t-s)}\,d\,s = \frac{1 - e^{-(\nu\,\alpha_n^2 + i\,\lambda)\,t}}{\nu\,\alpha_n^2 + i\,\lambda}$$

und dadurch erhält man

$$u + i\,v = \frac{2\,T}{\varrho\,\nu\,h}\left(\Sigma\,\gamma_n \frac{\sin \alpha_n\,(h-z)}{\alpha_n^2 + i\,\dfrac{\lambda}{\nu}} - \Sigma\,\gamma_n \frac{e^{-\nu\,\alpha_n^2\,t - i\,\lambda\,t} \sin \alpha_n\,(h-z)}{\alpha_n^2 + i\,\dfrac{\lambda}{\nu}}\right).$$

Die erste Reihe summiert man leicht. Es ist nämlich

$$\frac{2}{h}\sum \gamma_n \frac{\sin \alpha_n (h-z)}{\alpha_n^2 + i\frac{\lambda}{\nu}} = \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2\nu}}, z\right).$$

Setzen wir darum $\sqrt{\frac{\lambda}{2\nu}} = \beta$, so haben wir:

$$\frac{2}{h}\sum \gamma_n \frac{\sin \alpha_n (h-z)}{\alpha_n^2 + i\frac{\lambda}{\nu}} = \frac{\sinh \beta (1+i)(h-z)}{r \sinh \beta (1+i) h + \beta (1+i) \cosh \beta (1+i) h} = \varphi_1 - i\varphi_2 .$$

Wir schreiben darum:

$$u = \frac{T}{\eta}\left(\varphi_1 - \frac{2}{h}\sum \gamma_n e^{-\nu\alpha_n^2 t} \sin \alpha_n (h-z) \frac{\alpha_n^2 \cos \lambda t - 2\beta^2 \sin \lambda t}{\alpha_n^4 + 4\beta^4}\right),$$

$$v = -\frac{T}{\eta}\left(\varphi_2 - \frac{2}{h}\sum \gamma_n e^{-\nu\alpha_n^2 t} \sin \alpha_n (h-z) \frac{2\beta^2 \cos \lambda t + \alpha_n^2 \sin \lambda t}{\alpha_n^4 + 4\beta^4}\right).$$

Da die Reihen sehr stark konvergieren, lassen sich die Formeln sehr wohl für numerische Rechnungen anwenden.

Mit wachsendem Wert von t nähern sich u und v den konstanten Werten $\frac{T}{\eta}\varphi_1$ und $-\frac{T}{\eta}\varphi_2$.

Wenn $\beta h > \pi$ ist, kann man mit großer Annäherung schreiben:

$$\varphi_1 = e^{-\beta z}\frac{(r+\beta)\cos \beta z - \beta \sin \beta z}{(r+\beta)^2 + \beta^2}, \qquad \varphi_2 = e^{-\beta z}\frac{\beta \cos \beta z + (r+\beta)\sin \beta z}{(r+\beta)^2 + \beta^2}.$$

Der Strom bildet mit der x-Achse einen Winkel, der durch folgende Formel bestimmt ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\beta \cos \beta z + (r+\beta)\sin \beta z}{(r+\beta)\cos \beta z - \beta \sin \beta z} = -\operatorname{tg}(\beta z + \alpha_0),$$

wo $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\beta}{r+\beta}$ ist.

An der Oberfläche ist die Ablenkung kleiner als 45°, wächst aber mit der Tiefe. Aus den Formeln für u und v sieht man, daß der Geschwindigkeitsvektor um diese Gleichgewichtslage schwankt, um zuletzt damit zusammenzufallen. Setzen wir $u + iv = \psi$, findet man

$$\psi = \frac{2\nu}{h}\int_0^t ds\,(k(s) + i\,g(s))\, e^{-i\lambda(t-s)} \sum \gamma_n e^{-\nu\alpha_n^2 (t-s)} \sin \alpha_n (h-z).$$

Zur Abkürzung der Schreibweise setzen wir $k(s) + i\,g(s) = f(s)$, dann wird

$$\psi = \frac{2\nu}{h}\int_0^t ds\, f(s) \sum \gamma_n e^{-(\nu\alpha_n^2 + i\lambda)(t-s)} \sin \alpha_n (h-z).$$

Wir bilden jetzt den Mittelwert von ψ für die Zeit T; wir finden

$$\overline{\psi} = \frac{2\nu}{hT}\int_0^T dt \int_0^t ds\, f(s) \sum \gamma_n e^{-(\nu\alpha_n^2 + i\lambda)(t-s)} \sin \alpha_n (h-z)$$

$$= \frac{2\nu}{hT}\int_0^T ds\, f(s) \int_s^T dt \sum \gamma_n e^{-(\nu\alpha_n^2 + i\lambda)(t-s)} \sin \alpha_n (h-z)$$

$$= \frac{2\nu}{hT}\int_0^T ds\, f(s) \sum \frac{\gamma_n \sin \alpha_n (h-z)}{\nu\alpha_n^2 + i\lambda} - \frac{2\nu}{hT}\int_0^T ds\, f(s) \sum \frac{\gamma_n e^{-(\nu\alpha_n^2 + i\lambda)(T-s)} \sin \alpha_n (h-z)}{\nu\alpha_n^2 + i\lambda},$$

Es ist nun

$$\frac{2\nu}{h}\sum \frac{\gamma_n \sin \alpha_n (h-z)}{\nu\alpha_n^2 + i\lambda} = \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2\nu}}, z\right) = \Phi(\beta, z).$$

Wir finden dann

$$\overline{\psi} = \Phi(\beta, z)\frac{1}{T}\int_0^T f(s)\,ds - \frac{2\nu}{hT}\int_0^T ds\, f(s) \sum \frac{\gamma_n e^{-(\nu\alpha_n^2 + i\lambda)(T-s)} \sin \alpha_n (h-z)}{\nu\alpha_n^2 + i\lambda}.$$

Es ist klar, daß mit wachsendem Wert von T das letzte Glied kleiner wird, so daß der Mittelwert von ψ auch angenähert dem Mittelwerte des Winddruckes entspricht. Die große Bedeutung dieser Tatsache für die Verwertung von gleichzeitigen Wind- und Strombeobachtungen ist wohl einleuchtend.

Zuletzt sollen ein paar numerische Beispiele gegeben werden. Es wird angenommen $r = 0$, $f(t) = \text{konst.}$, $g(t) = 0$ und speziell $\sqrt{\frac{\lambda}{2\nu}}\, h = \pi$. Man findet dann für die relativen Geschwindigkeiten an der Oberfläche (Die Zeit ist in Pendelstunden gemessen 1 P.-St. $= \frac{\pi}{6\lambda}$ sek., α ist die Ablenkung der Stromrichtung von der x-Achse):

t	0	1	2	3	6	12	∞
u	0	0,1788	0,2328	0,2483	0,1684	0,1528	0,1586
v	0	− 0,0315	− 0,0839	− 0,1395	− 0,2272	− 0,1130	− 0,1586
α	—	− 9,4°	− 19,8°	− 29,3°	− 53,5°	− 36,5°	− 45°

Dann nehmen wir an $r h = 1$; die übrigen Größen ungeändert. Wir finden dann

t	0	1	2	3	6	12	∞
u	0	0,1550	0,1928	0,2018	0,1605	0,1493	0,1527
v	0	− 0,0285	− 0,0648	− 0,0986	− 0,1485	− 0,0998	− 0,1160
α	—	− 10,4°	− 18,5°	− 26°	− 42,8°	− 33,7°	− 37,2°

Die Wirkung der Reibung wird in dem letzten Falle größer, und die Geschwindigkeiten nähern sich rascher den stationären Werten. Die Ablenkung ist kleiner und der Strom auch nicht so stark wie im Falle der freien Oberfläche. Die Schwankungen, die vom Winde hervorgebracht werden, überlagern sich den Gezeitenströmungen, und dies ist ein Uebelstand, dem man bei der Bestimmung von Gezeitenströmungen soweit wie möglich Rechnung tragen muß.

5. Zusammenfassung. Die Bewegungsgleichungen für nicht stationäre, windererzeugte Meeresströmungen werden integriert in dem Falle, daß der Tangentialdruck des Windes mit der Zeit veränderlich ist und auch an der Oberfläche ein Widerstand wirkt, der proportional der Geschwindigkeit angenommen wird.

Das Problem läßt sich auf eine Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung zurückführen. Die Lösung der Aufgabe führt auf eine Integralgleichung, die gelöst wird. Nachdem wird gezeigt, daß man sofort die Lösung durch bestimmte Integrale angeben kann.

Endlich werden diese Integrale auf eine Form gebracht, die für numerische Rechnungen verwendbar ist. In dem Falle eines konstanten Winddruckes ist die Rechnung vollständig durchgeführt, und durch Beispiele ist gezeigt, wie der Stromvektor um eine Gleichgewichtslage schwankt, ehe die stationären Verhältnisse eintreten.

Die Mittelwerte der Stromkomponenten von $t = 0$ bis $t = T$ nähern sich mit wachsendem Werte von T den Komponenten des stationären Stromes, der hervorgebracht wird von einem Winddrucke, der dem Mittelwerte des Winddrucks in dem betrachteten Zeitintervall gleich ist.

Bei der Verwertung von gleichzeitigen Wind- und Strombeobachtungen kann man darum die Mittelwerte vergleichen, als ob die Verhältnisse stationär wären, wenn nur der Zeitraum groß genug ist.

6. Lösung im Falle, daß die Reibung von der Tiefe abhängig ist. In der vorgehenden Entwicklung war angenommen, daß der Koeffizient der virtuellen Reibung eine Konstante sei. Es zeigt sich aber oft, daß man eine bessere Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtungen erhält, wenn man annimmt, daß die Reibung von den hydrographischen Verhältnissen abhängig ist, und daß der Koeffizient der Reibung somit eine Funktion von z ist.

Die Bewegungsgleichungen werden in diesem Falle:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda v &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \lambda u &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial v}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \quad \nu = \frac{\eta}{\varrho}.$$

Die Grenzbedingungen sind wie früher:

$$u = 0, \quad v = 0 \text{ für } z = h; \quad \eta \frac{\partial u}{\partial z} = -T_x, \quad \eta \frac{\partial v}{\partial z} = -T_y; \quad z = 0.$$

Wir setzen

$$\nu = \nu_0 \cdot k(z), \quad k(o) = 1, \quad u + iv = \Phi, \quad \frac{T_x}{\eta} + i \frac{T_y}{\eta} = f(t).$$

Wir können dann die Bewegungsgleichungen in folgende Gleichung zusammenfassen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + i\lambda \Phi = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right),$$

Mit den Grenzbedingungen

$$\Phi = 0 \text{ für } z = h, \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = f(t), \quad z = 0.$$

Außerdem fügen wir die Initialbedingung zu

$$\Phi = 0 \text{ für } t = 0.$$

In Analogie mit der vorhergehenden Lösung setzen wir:

$$\Phi = \frac{4\nu_0}{\pi} \int_0^t ds\, f(s)\, e^{-i\lambda(t-s)} \int_0^\infty \Re e\left[e^{2i\nu_0\beta^2(t-s)}\, \psi(\beta, z)\right] \beta\, d\beta,$$

wo ψ ein Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dz}\left(k(z) \frac{d\psi}{dz}\right) - 2i\beta^2 \psi = 0 \text{ ist},$$

mit den Grenzbedingungen

$$\psi = 0, \quad z = h; \quad \frac{d\psi}{dz} = -1, \quad z = 0.$$

Wir suchen jetzt eine Fourierentwicklung für ψ zu finden. Integriert man die Differentialgleichung zwischen 0 und z, erhält man:

$$k(z) \frac{d\psi}{dz}\Big|_0^z = 2i\beta^2 \int_0^z \psi(y)\, dy$$

oder

$$k(z) \frac{d\psi}{dz} + 1 = 2i\beta^2 \int_0^z \psi(y)\, dy, \qquad \frac{d\psi}{dz} = -\frac{1}{k(z)} + \frac{2i\beta^2}{k(z)} \int_0^z \psi(y)\, dy.$$

Integriert man diese Gleichung zwischen z und h, findet man:

$$\psi(z) = \int_z^h \frac{ds}{k(z)} - 2i\beta^2 \int_z^h \frac{ds}{k(s)} \int_0^s \psi(y)\, dy$$

Es ist nun

$$\int_z^h \frac{ds}{k(s)} \int_0^s \psi(y)\, dy = \int_0^z dy\, \psi(y) \int_z^h \frac{ds}{k(s)} + \int_z^h dy\, \psi(y) \int_y^h \frac{ds}{k(s)}.$$

Wir können darum schreiben:

$$\int_z^h \frac{ds}{k(s)} \int_0^s \psi(y)\, dy = \int_0^h K(z, y)\, \psi(y)\, dy,$$

und

$$\psi(z) = \int_z^h \frac{ds}{k(s)} - 2i\beta^2 \int_0^h K(z, y)\, \psi(y)\, dy.$$

Der Kern dieser Integralgleichung ist

$$K(z, y) = \int_z^h \frac{ds}{k(s)}, \quad y \leq z. \qquad K(z, y) = \int_y^h \frac{ds}{k(s)}, \quad y \geq z.$$

Dieser Kern ist offenbar symmetrisch und die homogene Integralgleichung hat unendlich viele Lösungen:

$$\varphi_n(z) = \mu_n \int_0^h K(z, y)\, \varphi_n(y)\, dy.$$

Setzt man $\int\limits_0^h \frac{ds}{\sqrt{k(s)}} = h_1$, so nähern sich die Eigenwerte μ_n asymptotisch den Werten $\left((2n+1)\frac{\pi}{2h_1}\right)^2$. Es gilt darum die bilineare Reihe

$$K(z,y) = \Sigma \frac{\varphi_n(z)\,\varphi_n(y)}{\mu_n},$$

und diese Reihe konvergiert in dem betrachteten Intervalle.

Wir können darum $\psi(z)$ in eine konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen entwickeln.

Setzen wir zuerst $\int\limits_z^h \frac{ds}{k(s)} = \Sigma c_n \varphi_n(z)$, so haben wir, da $\int\limits_0^h \varphi_n^2 dz = 1$ angenommen ist,

$$c_n = \int\limits_0^h dz\,\varphi_n(z)\int\limits_z^h \frac{ds}{k(s)} = \int\limits_0^h \frac{ds}{k(s)}\int\limits_0^s \varphi_n(z)\,dz = -\frac{1}{\mu_n}\int\limits_0^h \frac{ds}{k(s)}\left(k(z)\frac{d\varphi_n}{dz}\right)_0^s = -\frac{1}{\mu_n}\int\limits_0^h \frac{d\varphi_n}{ds}\,ds = \frac{\varphi_n(o)}{\mu_n}$$

und somit

$$\int\limits_z^h \frac{ds}{k(s)} = \Sigma \frac{\varphi_n(o)\,\varphi_n(z)}{\mu_n}.$$

Diese Reihe konvergiert auch für alle Werte von z in dem betrachteten Intervall. Machen wir jetzt den Ansatz

$$\psi(z) = \Sigma\, a_n\,\varphi_n(z),$$

so gibt die Integralgleichung

$$\Sigma\, a_n\,\varphi_n(z) = \Sigma \frac{\varphi_n(0)\,\varphi_n(z)}{\mu_n} - 2\,i\,\beta^2\,\Sigma\, a_n \frac{\varphi_n(z)}{\mu_n}$$

und somit

$$a_n = \frac{\varphi_n(o)}{\mu_n + 2\,i\,\beta^2}, \qquad \psi = \Sigma \frac{\varphi_n(o)\,\varphi_n(z)}{\mu_n + 2\,i\,\beta^2}.$$

Jetzt können wir diesen Wert von ψ in das Doppelintegral einsetzen. Man findet:

$$\Phi = \frac{4\,\nu_0}{\pi}\int\limits_0^t ds\,f(s)\,e^{-i\lambda(t-s)}\int\limits_0^\infty \Re\left(e^{2\,i\,\nu_0\,\beta^2(t-s)}\,\Sigma \frac{\varphi_n(o)\,\varphi_n(z)}{\mu_n + 2\,i\,\beta^2}\right)\beta\,d\beta.$$

Nun haben wir früher gefunden:

$$\Re\int\limits_0^\infty e^{2\,i\,\nu_0\beta^2(t-s)}\,\frac{\beta\,d\beta}{\mu_n + 2\,i\,\beta^2} = \frac{\pi}{4}\,e^{-\nu_0\,\mu_n(t-s)},$$

und wir haben somit

$$\Phi = \nu_0\int\limits_0^t ds\,f(s)\,\Sigma\, e^{-(\nu_0\mu_n + i\lambda)(t-s)}\,\varphi_n(o)\,\varphi_n(z).$$

Dies ist nun die gesuchte Entwicklung. Es ist aber noch nicht bewiesen, daß diese Entwicklung wirklich die Aufgabe löst, wir müssen vielmehr jetzt zeigen, daß Φ die Differentialgleichung befriedigt und auch daß die Grenzbedingungen erfüllt sind.

Zunächst erhält man durch Differentiation

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + i\lambda\Phi = -\nu_0^2\int\limits_0^t ds\,f(s)\,\Sigma\, e^{-(\nu_0\mu_n + i\lambda)(t-s)}\,\mu_n\,\varphi_n(o)\,\varphi_n(z) + \nu_0\,f(t)\,\Sigma\,\varphi_n(o)\,\varphi_n(z),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(k(z)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = \nu_0\int\limits_0^t ds\,f(s)\,\Sigma\, e^{-(\nu_0\mu_n + i\lambda)(t-s)}\,\mu_n\,\varphi_n(o)\,\varphi_n(z),$$

und somit

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + i\lambda\Phi - \nu_0\frac{\partial}{\partial z}\left(k(z)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = \nu_0\,f(\tau)\,\Sigma\,\varphi_n(o)\,\varphi_n(z).$$

Die Reihe $\Sigma\,\varphi_n(o)\cdot\varphi_n(z)$ ist aber divergent. Wenn sie konvergierte, so würde sie den Wert 0 repräsentieren.

Es ist nämlich

$$\int\limits_z^h \frac{ds}{k(s)} = \Sigma \frac{\varphi_n(o)\,\varphi_n(z)}{\mu_n},$$

und hierdurch

$$O = \Sigma \frac{\varphi_n(o) \frac{d}{dz}\left[k(z) \frac{d\varphi_n}{dz}\right]}{\mu_n} = \Sigma\, \varphi_n(o)\, \varphi_n(z).$$

Aber die Entwicklung divergiert, es ist darum besser, einen anderen Weg zu gehen. Setzen wir

$$J = \int_0^h K(z,y)\, \Phi(y,t)\, dy,$$

so haben wir

$$J = \nu_0 \int_0^t ds\, f(s)\, \Sigma\, e^{-(\nu_0 \mu_n + i\lambda)(t-s)} \frac{\varphi_n(o)\, \varphi_n(z)}{\mu_n}.$$

Es ist nun

$$\frac{\partial J}{\partial t} + i\lambda J = \int_0^h K(z,y)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + i\lambda \Phi\right) dy = -\nu_0{}^2 \int_0^t ds\, f(s)\, \Sigma\, e^{-(\nu_0\mu_n + i\lambda)(t-s)}\, \varphi_n(o)\, \varphi_n(z)$$
$$+ \nu_0 f(t)\, \Sigma \frac{\varphi_n(o)\, \varphi_n(z)}{\mu_n}$$

oder

$$\int_0^h K(z,y)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + i\lambda \Phi\right) dy = -\nu_0\, \Phi(z,t) + \nu_0 f(t) \int_z^h \frac{ds}{k(s)}.$$

Weiter haben wir

$$\int_0^h K(z,y) \frac{\partial}{\partial y}\left(k(y) \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dy = \int_z^h \frac{ds}{k(s)} \int_0^s \frac{\partial}{\partial y}\left(k(y) \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dy$$

$$= \int_z^h \frac{ds}{k(s)}\left[k(s) \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0\right] ds = -\Phi(z,t) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 \int_z^h \frac{ds}{k(s)}.$$

Wir finden somit

$$\int_0^h K(z,y)\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + i\lambda\Phi - \nu_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(k(y) \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\right] dy = \nu_0\left[f(t) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0\right] \int_z^h \frac{ds}{k(s)}.$$

Setzen wir zur Abkürzung der Schreibweise

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + i\lambda\Phi - \nu_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(k(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = \psi(z,t), \qquad f(t) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 = \omega(t),$$

so haben wir

$$\int_0^h K(z,y)\, \psi(y\, t) = \nu_0\, \omega(t) \int_z^h \frac{ds}{k(s)}$$

oder

$$\int_z^h \frac{ds}{k(s)} \left\{ \int_0^s \psi(y,t)\, dy - \nu_0\, \omega(t) \right\} = 0,$$

weil z willkürlich ist, folgt daraus

$$\int_0^s \psi(y,t)\, ds = \nu_0\, \omega(t)$$

oder weil auch s beliebig ist $\quad \psi(y\, t) = 0, \quad \omega(t) = 0.$

Wir haben somit gefunden:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + i\lambda\Phi = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -f(t), \quad z = 0.$$

Daß auch die anderen Bedingungen $\Phi = 0$, $z = h$, $\Phi = 0$, $t = 0$, befriedigt sind, folgt unmittelbar aus der Form der Entwicklung.

Wir können jetzt einen Mittelwert bilden von $t = 0$ bis $t = T$; wir erhalten

$$\Phi_m = \frac{\nu_0}{T} \int_0^T dt \int_0^t ds\, f(s)\, \Sigma\, e^{-(\nu_0\mu_n + i\lambda)(t-s)}\, \varphi_n(o)\, \varphi_n(z),$$

$$\Phi_m = \frac{\nu_0}{T} \int_0^T ds\, f(s) \int_s^T dt\, \Sigma\, e^{-(\nu_0\mu_n + i\lambda)(t-s)}\, \varphi_n(o)\, \varphi_n(z).$$

Es ist aber

$$\int_s^T e^{-(\nu_0 \mu_n + i\lambda)(t-s)}\, d\tau = \frac{1 - e^{-(\nu_0 \mu_n + i\lambda)(T-s)}}{\nu_0 \left(\mu_n + i\frac{\lambda}{\nu^0}\right)}$$

und somit

$$\Phi_m = \Sigma \frac{\varphi_n(o)\,\varphi_n(z)}{\mu_n + i\frac{\lambda}{\nu}} \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\,ds - \frac{1}{T}\int_0^T ds\, f(s)\, \Sigma\, e^{-(\nu\mu_n + i\lambda)(T-s)} \frac{\varphi_n(o)\,\varphi_n(z)}{\mu_n + i\frac{\lambda}{\nu_0}}.$$

Setzt man $\frac{\lambda}{2\nu} = \beta^2$, so hat man $\Sigma \frac{\varphi_n(o)\,\varphi_n(z)}{\mu_n + 2i\beta^2} = \psi(\beta, z)$. $\psi(\beta, z)$ ist gerade die Funktion, die die Verteilung des stationären Stromes mit der Tiefe angibt. Das letzte Glied in der obigen Gleichung geht mit wachsendem Wert von T gegen 0. Wir haben somit den allgemeinen Satz bewiesen. Wenn ein Meeresstrom nur von dem Winde erregt wird und man von der Stauwirkung absehen kann, so entsprechen sich die mittleren Werte der Stromkomponenten und die mittleren Werte der Winddruckkomponenten, als ob die Verhältnisse stationär wären, wenn nur das Zeitintervall hinreichend groß gewählt wird. Der Koeffizient der virtuellen Reibung kann dabei eine beliebige Funktion von der Tiefe sein. Eine statistische Behandlung von Wind und Strombeobachtungen ist somit erlaubt. 965

Zerreißerscheinungen in Strömungen zäher Flüssigkeiten.

Von **M. LAGALLY** in Dresden.

Im Inneren einer zähen Flüssigkeit, die sich in langsamer Bewegung befindet, stellt sich ein Spannungszustand ein, für den neben den äußeren Kräften, im allgemeinen der Schwerkraft, und neben dem isotropen Flüssigkeitsdruck in erster Linie die infolge der Zähigkeit zwischen benachbarten Stromschichten auftretenden Scherkräfte verantwortlich sind. Da in diesem Spannungszustand auch Zugspannungen möglich sind, ist zu erwarten, daß es unter gewissen Bedingungen im Innern der Flüssigkeit zu Zerreißungen kommen wird. Solche Zerreißungen sind bei manchen Strömungen, z. B. von Schmiermitteln, vermutet, in selteneren Fällen beobachtet[1]) worden. Im großartigsten Maßstabe zeigt die Natur das Zerreißen einer zähen Flüssigkeit in der Bildung von Spalten im Gletschereis; auch die Zerklüftung von lehmigem Erdreich, das in wassergesättigtem Zustand ins Fließen gekommen ist, dürfte eine verwandte Erscheinung sein.

Im folgenden wird zunächst eine Untersuchung von Somigliana[2]), die sich mit der gleichförmigen Strömung einer zähen Flüssigkeit in einem zylindrischen Kanal unter Berücksichtigung der Schwerkraft und des Atmosphärendruckes beschäftigt, in ihren Hauptzügen wiedergegeben. Sodann wird der Spannungszustand untersucht, der in dieser Strömung besteht. Hieran schließt sich die Diskussion der Bedingungen, unter denen Zerreißungen durch Zugspannungen eintreten können. Dann folgt als Beispiel die Untersuchung einer ebenen Flüssigkeitsschicht, die eine geneigte Ebene hinabfließt; es ergibt sich, daß die Möglichkeit des Abreißens der Flüssigkeit unter der Wirkung ihres eigenen Gewichtes erst dann gegeben ist, wenn der Neigungswinkel der Grundebene größer als 45° ist. Ein paar weitere Beispiele, die sich auf die Spaltenbildung in Gletschern beziehen und die mehr für den Naturforscher als für den Ingenieur Interesse besitzen, habe ich an anderer Stelle[3]) behandelt.

1. Gleichförmige Strömung in einem zylindrischen Gerinne. Unter Vernachlässigung der Trägheitskräfte gelten für die langsame Bewegung einer inkompressiblen, sehr zähen Flüssigkeit die Navier-Stokesschen Gleichungen in der Form

$$\operatorname{grad} p = \mu \Delta \mathfrak{v} + \varrho \mathfrak{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Dabei ist p der isotrope Druck, μ der Koeffizient der Zähigkeit[4]), ϱ die Dichte der Flüssigkeit; $\mathfrak{v}$ ihre Geschwindigkeit, $\mathfrak{P}$ die auf die Masseneinheit bezogene äußere Kraft,

[1]) Vergl. etwa M. Toepler, Zerreißen von Flüssigkeiten zwischen rollender Kugel und ebener Platte. Ann. d. Physik, IV. Folge, Bd. 55, Heft 5.

[2]) C. Somigliana, Sulla profondita dei ghiacciai. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, math. phys. Kl. 30 (1921. Die Arbeit ist mir bekannt geworden durch ein Referat von S. Finsterwalder, Zeitschrift für Gletscherkunde 12 (1921/22), S. 173.

[3]) M. Lagally, Versuch einer Theorie der Spaltenbildung in Gletschern. Zeitschrift für Gletscherkunde 17 (1929), S. 285.

[4]) Handbuch der Physik von Geiger u. Scheel, Bd. VII, Kap. 2. L. Hopf, Zähe Flüssigkeiten, S. 91.

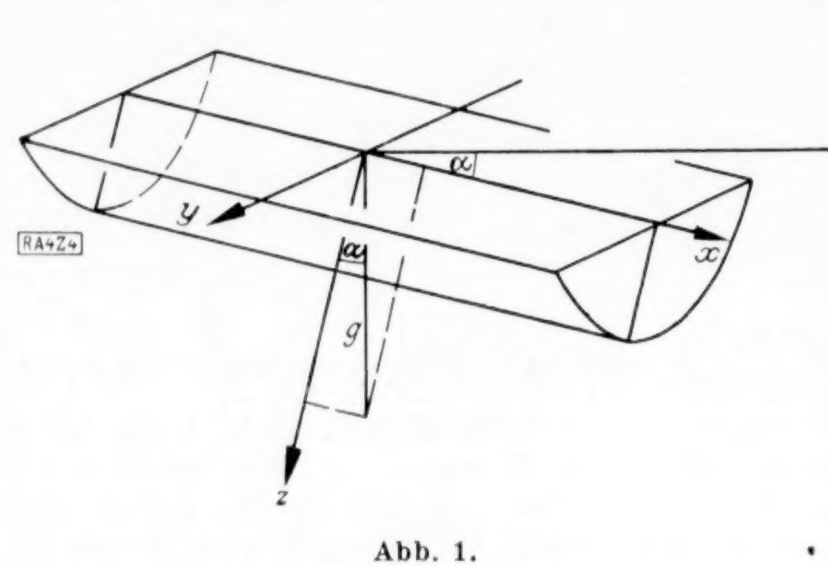


Abb. 1.

im allgemeinen die Schwerkraft. Δ ist der Laplacesche Operator. Sucht man nach Integralen, welche eine gleichförmige Strömung in einem zylindrischen Gerinne beschreiben, wobei sich jedes Teilchen parallel zur Zylinderachse bewegt, so wird man zunächst das Koordinatensystem der Strömung anpassen. Die x-Achse soll in die Stromrichtung fallen und gegen die Horizontale unter dem Winkel α geneigt sein; die y-Achse sei horizontal und verlaufe in der Richtung vom linken Ufer des Gerinnes gegen das rechte zu; dann geht die z-Achse eines Rechtssystems nach abwärts unter dem Winkel α gegen die Vertikale (Abb. 1).

Von der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist dann nur die in die x-Achse fallende Komponente u von Null verschieden; sie ist eine Funktion von y und z allein, wie übrigens auch der Druck p. Die Bewegungsgleichungen werden in skalarer Form, wenn g die Schwerbeschleunigung bedeutet:

$$0 = \mu \Delta u + \varrho g \sin\alpha, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \varrho g \cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1').$$

Diese Gleichungen können sofort integriert werden. Der Druck wird

$$p = \varrho g z \cos\alpha + p_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

p_0 ist der Druck in der Ebene $z = 0$, im allgemeinen der Atmosphärendruck, wenn diese Ebene freie Oberfläche ist. Die Geschwindigkeit ist

$$u = {}^1/_2 \left[\varphi(y + iz) + \overline{\varphi}(y - iz)\right] - \frac{\varrho g}{2\mu} z^2 \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

hier sind φ und $\overline{\varphi}$ konjugiert komplexe Funktionen.

Beschränkt man sich auf den Fall, daß für reelle Argumente $\varphi(y) = \overline{\varphi}(y)$ ist, so ist die Strömung zur z-Ebene symmetrisch. Da dann überdies an der z-Ebene $\frac{\partial u}{\partial z}$ verschwindet, also die Geschwindigkeit einen extremen und zwar einen Höchstwert besitzt, verschwinden, wie im folgenden genauer gezeigt wird, an dieser Ebene alle von der Zähigkeit herrührenden Spannungen, und es bleibt nur der überlagerte isotrope Druck p über, der gleich dem Atmosphärendruck p_0 wird. Die Ebene $z = 0$ kann also als freie Oberfläche der Strömung betrachtet werden. Die Oberflächengeschwindigkeit wird

$$u_0 = \varphi(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Das Profil des Gerinnes wird durch die Bedingung $u = 0$ bestimmt und ergibt sich also aus der Gleichung

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(y + iz) + \overline{\varphi}(y - iz)\right] - \frac{\varrho g}{2\mu} z^2 \sin\alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Man bemerkt, daß man das Profil des Gerinnes und die Verteilung der Geschwindigkeit im Innern der Flüssigkeit kennt, sobald die Oberflächengeschwindigkeit u_0 bekannt ist. Das ist im wesentlichen die von Somigliana entwickelte Theorie.

2. Spannungszustand der zähen Flüssigkeit. Die Deformation, die ein Flüssigkeitsteilchen in der Zeiteinheit erleidet, wird, abgesehen von einer für das folgende unwichtigen Drehung ${}^1/_2 \operatorname{rot} \mathfrak{v}$, durch die 3 Dilatationen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

und durch die drei halben Winkelverzerrungen

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right); \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

bestimmt. Aus (2) folgt, daß von diesen 6 Verzerrungskomponenten nur 2 von Null verschieden sind, nämlich

$$\gamma_{xy} = {}^1/_2\, u_y; \quad \gamma_{xz} = {}^1/_2\, u_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

(Die Differentialquotienten von u werden von nun an durch einen Index bezeichnet.)

Also hat auch der Spannungszustand, welcher wegen der Zähigkeit der Flüssigkeit die Deformation begleitet, und dessen Komponenten denen der Verzerrung proportional sind, nur 2 von Null verschiedene Komponenten, nämlich die beiden Schubspannungen [1])

$$\tau_{xy} = \mu u_y; \quad \tau_{xz} = \mu u_z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Die dritte Schubspannung τ_{yz}, sowie die drei Normalspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sind Null; von dem überlagerten isotropen Druck ist dabei abgesehen.

Dieser Spannungszustand soll jetzt auf die Größe und Richtung seiner Hauptspannungen untersucht werden [2]). Die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

welche die drei Hauptspannungen $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ergibt, reduziert sich auf

$$\begin{vmatrix} -\sigma & \mu u_y & \mu u_z \\ \mu u_y & -\sigma & 0 \\ \mu u_z & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; (6) \qquad \text{oder} \qquad \sigma^3 - \sigma \mu^2 (u_y^2 + u_z^2) = 0 \quad . \; . \; (6')$$

und hat die Wurzeln

$$\sigma_1 = \mu \sqrt{u_y^2 + u_z^2}; \quad \sigma_2 = -\mu \sqrt{u_y^2 + u_z^2}); \quad \sigma_3 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (7).$$

Von diesen Hauptspannungen ist die erste ein Zug, die zweite ein Druck, während die dritte verschwindet.

Nun sind die drei Richtungscosinus einer jeden Hauptspannung den Minoren der aus zwei Zeilen der Determinante (6) gebildeten Matrix proportional, wenn σ durch die betreffende Hauptspannung ersetzt ist. Es verhalten sich also etwa die Richtungscosinus der ersten Hauptspannung wie die Minoren der Matrix

$$\begin{Vmatrix} u_y & -\sqrt{u_y^2 + u_z^2} & 0 \\ u_z & 0 & -\sqrt{u_y^2 + u_z^2} \end{Vmatrix} \qquad \text{oder wie} \qquad \sqrt{u_y^2 + u_z^2} : u_y : u_z.$$

Legt man in die Richtungen der drei Hauptspannungen die Einheitsvektoren $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3$ (Abb. 2), so wird

$$\mathfrak{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mathfrak{i} + \frac{\mathfrak{j} u_y + \mathfrak{k} u_z}{\sqrt{u_y^2 + u_z^2}} \right]; \quad \mathfrak{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\mathfrak{i} + \frac{\mathfrak{j} u_y + \mathfrak{k} u_z}{\sqrt{u_y^2 + u_z^2}} \right]; \quad \mathfrak{t}_3 = \frac{-\mathfrak{j} u_z + \mathfrak{k} u_y}{\sqrt{u_y^2 + u_z^2}} \; . \; . \; (8).$$

Damit sind die Hauptspannungen und ihre Richtungen bestimmt. In den Punkten der Ebene $z = 0$ wird $\mathfrak{t}_3 = \mathfrak{k}$; die spannungsfreie Hauptrichtung fällt in die Normalenrichtung dieser Ebene. Damit ist der oben in Aussicht gestellte Nachweis, daß die z-Ebene als freie Oberfläche angesehen werden kann, vollständig erbracht.

Abb. 2.

3. Zugspannungen und Zerreißungen. Der berechnete Spannungszustand ist von dem isotropen Druck p überlagert, den man, da Zugspannungen positives Vorzeichen haben, zu den drei Hauptspannungen mit negativem Vorzeichen hinzufügen muß, um die Gesamtspannungen zu erhalten. Die Gesamtspannungen sind also

$$-p + \mu \sqrt{u_y^2 + u_z^2}; \quad -p - \mu \sqrt{u_y^2 + u_z^2}; \quad -p.$$

Davon sind die beiden letzten unter allen Umständen Druckspannungen; nur die erste, die mit S bezeichnet werden soll, also

$$S = -p + \mu \sqrt{u_y^2 + u_z^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

kann auch eine Zugspannung sein.

[1]) Handb. d. Phys. VII, Kap. 2, S. 92, 93.

[2]) Handb. d. Phys. VI, Kap. 2. E. Trefftz, Math. Elastizitätstheorie, S. 52.

Die Zugspannung wird zu einer Zerreißung der zähen Flüssigkeit führen, wenn sie größer ist als ihre Zugfestigkeit q. Man hat also in der Flüssigkeit drei verschiedene Gebiete zu unterscheiden:

A) $S < 0$ reine Druckgebiete;
B) $0 < S < q$ Zuggebiete;
C) $q < S$ Zerreißgebiete.

Die Zerreißungen, die in den Gebieten C entstehen, sind von Ebenen-Elementen gebildet, welche an jeder Stelle auf dem Vektor $\mathfrak{t}_1$ senkrecht stehen. Bekanntlich besitzen die Hauptspannungslinien eines Spannungszustandes im allgemeinen keine Orthogonalflächen. Die infinitesimalen Elemente der Reißflächen schließen sich also nicht zu endlichen Flächen zusammen, sondern höchstens zu Flächenstreifen, die sich gegeneinander auskeilen. Man darf aber hier nicht übersehen, daß die wirklich auftretenden Erscheinungen von denen der Theorie in gewisser Weise abweichen können, weil die eingangs vorausgesetzte Inkompressibilität der Flüssigkeit eine idealisierende Annahme ist, die wohl niemals exakt erfüllt ist. Das Entstehen einer Reißfläche wird also dadurch, daß es der Flüssigkeit die Möglichkeit zu einer Kontraktion bietet, den Spannungszustand lokal verändern. Es können sich infolgedessen die infinitesimalen Reißflächen in Wirklichkeit doch zu endlichen Flächen zusammensetzen; auch werden die Reißflächen in einem Gebiet C nicht dicht liegen, sondern in bestimmten Abständen auftreten, in welchen die an einer Reißfläche infolge der eintretenden Kontraktion aufgehobene Zugspannung S wieder den Betrag der Zugfestigkeit q erreicht.

Die Stellung einer Reißfläche im Raum ist dadurch bestimmt, daß sie auf dem Vektor $\mathfrak{t}_1$ senkrecht steht, also der Ebene

$$x\sqrt{u_y^2+u_z^2}+y\,u_y+z\,u_z=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

parallel ist. Um diese Gleichung zu diskutieren, sei $u_y > 0$ vorausgesetzt; d. h. ein Gebiet ins Auge gefaßt, in dem die Geschwindigkeit vom linken Ufer des Gerinnes an gegen die Mitte hin zunimmt. An der Oberfläche der Strömung reduziert sich dann die Gleichung der Reißflächen auf $x+y=0$; die Reißflächen stehen auf der freien Oberfläche senkrecht und ihre Schnittlinien mit der Oberfläche laufen unter 45° nach vorwärts gegen den Rand. Da die Geschwindigkeit an der Oberfläche einen Höchstwert besitzt, ist in tiefer gelegenen Punkten im Inneren der Flüssigkeit $u_z < 0$. Die zur Oberfläche parallele Streichrichtung der Reißflächen schließt also im Inneren mit der Richtung des Ufers einen Winkel β ein, der mit wachsender Tiefe von 45° gegen 90° wächst. Der Einfallswinkel γ einer Reißfläche gegen die Oberfläche ergibt sich aus

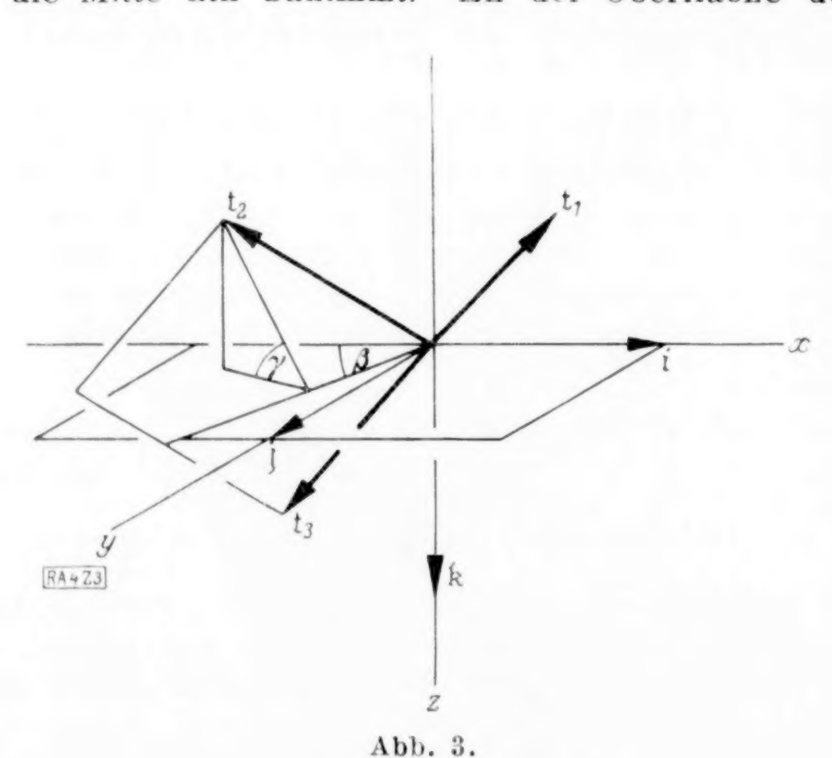


Abb. 3.

$$\cos\gamma=\frac{u_z}{\sqrt{2}\,\sqrt{u_y^2+u_z^2}}.$$

Mit wachsender Tiefe nimmt γ von 90° gegen 45° ab; dabei fallen die Reißflächen nach vorn ein (Abb. 3).

4. Beispiel. Strömung auf einer ebenen Unterlage. Wenn die Oberflächengeschwindigkeit u_0 von y unabhängig, also auf der ganzen ebenen Oberfläche konstant ist, wird die Geschwindigkeit im Innern nach (2b)

$$u=u_0-\frac{\varrho g}{2\mu}z^2\sin\alpha.$$

Das Profil des Grundes der Strömung ist nach (4) durch

$$0=u_0-\frac{\varrho g}{2\mu}z^2\sin\alpha$$

gegeben. Es handelt sich also um die Strömung einer Flüssigkeitsschicht von der konstanten Tiefe $\sqrt{\frac{2\mu u_0}{\varrho g \sin\alpha}}$ auf einer ebenen Unterlage.

Diese Strömung ist an sich wohlbekannt als laminare Strömung mit konstantem Druckgefälle zwischen zwei festen Wänden[1]), deren Abstand gleich der doppelten Tiefe der hier betrachteten Schicht ist. Die Geschwindigkeit erreicht in der Mittelparallelebene zwischen den beiden festen Wänden ihren Höchstwert u_0; es sei nochmals betont, daß diese Ebene eine freie Oberfläche ist.

Die für das Auftreten von Zerreißungen maßgebende Spannung wird nach (9) und (2a)

$$S = -p_0 - \varrho g z \cos\alpha + \varrho g z \sin\alpha;$$

sie ist an der Oberfläche negativ, also eine Druckspannung, und ihr Betrag ist gleich dem Atmosphärendruck. Für die Untersuchung im Innern der Flüssigkeit sind zwei Fälle zu unterscheiden Ist die Unterlage mäßig geneigt, $\alpha < 45^0$, so bleibt S mit wachsendem z negativ; der Druck steigt mit wachsender Tiefe linear an, und Zerreißungen sind ausgeschlossen. Ist aber die Unterlage sehr steil, $\alpha > 45^0$, so wird S mit wachsendem z positiv, der Druck geht in Zug über, welcher unter Umständen die Festigkeitsgrenze überschreiten kann. In diesem Falle liegen untereinander, durch parallele Ebenen begrenzt, ein Druckgebiet A, ein Zuggebiet B, ein Zerreißgebiet C (Abb. 4).

Abb. 4.

Die Richtung der Spannung S ist nach (8) durch den Einheitsvektor

$$\mathfrak{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathfrak{i} + \mathfrak{k}\frac{u_z}{|u_x|}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathfrak{i} - \mathfrak{k}]$$

bestimmt. Die Reißflächen sind parallel der Ebene $z = x$ und laufen aus dem Innern unter 45^0 nach vorne gegen die Unterlage; die Flächenelemente setzen sich in diesem einfachen Fall ausnahmsweise zu Ebenen zusammen, welche das ganze Zerreißgebiet durchziehen. Da durch die Entstehung einer Reißfläche der Spannungszustand lokal verändert wird, besteht die Gefahr des Abreißens der ganzen strömenden Flüssigkeitsschicht unter der Wirkung ihres eigenen Gewichts. 4

Beitrag zur Lösung des ebenen Spannungsproblems.[2])

Von **ERNST KOHL** in Hannover.

In meiner Dissertation (Hannover 1924) wurde die Aufgabe, den Spannungszustand in einer polygonalen Scheibe unter Belastung von in den Ecken angreifenden Einzelkräften zu ermitteln, dadurch zu lösen versucht, daß dem Polygon ein Kreis einbeschrieben wurde, auf dessen Peripherie die Kräfte aus den Ecken verteilt wurden — und zwar jeweils auf den ihnen angehörenden Kreisbogen —, um dann für die Kreisscheibe unter den so erhaltenen Randbedingungen das Spannungsproblem zu lösen. Obschon dieser Weg zu annehmbaren Ergebnissen führte, befriedigte die Lösung insofern nicht, als sie nicht im ganzen Bereiche exakt war, da längs der Peripherie des Kreises im Verlaufe der Hauptspannungstrajektorien ein — wenn auch teilweise recht schwacher — Knick auftrat, wodurch immerhin die Möglichkeit nicht ausgeschaltet war, daß die genaue Lösung doch noch erhebliche Abweichungen aufweisen könnte. Weitere Versuche, auf dieser Grundlage zu einer verbesserten Lösung zu gelangen, führten nicht zu dem gewünschten Erfolg, bis schließlich der hier eingeschlagene Weg sich als gangbar erwies.

[1]) Handb. d. Phys. VII, Kap, 2, S. 102.

[2]) Gekürzte Fassung der von der Fakultät für Bauwesen der Technischen Hochschule Hannover zur Erlangung der venia legendi für das Lehrfach »Höhere Festigkeitslehre und räumliche Statik« genehmigten Habilitationsschrift. (W. S. 27/28).

Für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse und mancherlei Anregungen bin ich meinen hochverehrten Lehrern, insbesondere Hrn. Professor Dr.-Ing. E. h. Grüning und Hrn. Professor Dr. C. Müller zu Dank verpflichtet.

1. Darstellung der Spannungen des ebenen Spannungszustandes in Potentialfunktionen. Bei der mathematischen Behandlung verschiedener technischer Probleme bieten die Lehren der Funktionentheorie ein dankbares Hilfsmittel, insbesondere bei denjenigen Aufgaben, die mit der Potentialtheorie in enger Beziehung stehen. Die Differentialgleichung des ebenen Spannungszustandes $\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=0$ läßt sich in Form einer Potentialgleichung so schreiben

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)=0\,;$$

dabei stellt $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ die Summe der Normalspannungen in jedem Punkte dar. Die Vermutung liegt nahe, daß auch hier mit Vorteil die Theorie der komplexen Funktionen herangezogen wird. In der Tat ist dies auch schon geschehen; Föppl gibt in »Drang und Zwang« verschiedene Beispiele dafür an, jedoch handelt es sich bei den bisherigen Lösungen des ebenen Spannungsproblems mit Hilfe komplexer Funktionen ausschließlich um Einzelkräfte oder Kräftepaare in unendlichen Bereichen. Bei der hier gestellten Aufgabe, den Spannungszustand in einem beliebig begrenzten, ganz im endlichen liegenden Bereich zu ermitteln, müssen ganz andere Ueberlegungen einsetzen.

Die Gleichgewichtsbedingungen des ebenen Spannungszustandes, bezogen auf die rechtwinkligen Koordinaten x, y, lauten, in den Verschiebungsgrößen ξ und η ausgedrückt, wenn mit $e=\varepsilon_x+\varepsilon_y=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}$ die ebene Dehnung bezeichnet wird,

$$\varDelta\,\xi+\frac{m+1}{m-1}\frac{\partial e}{\partial x}=0\,,\qquad \varDelta\,\eta+\frac{m+1}{m-1}\frac{\partial e}{\partial y}=0\quad\ldots\ldots\quad(1).$$

Zwischen Spannungen und Verzerrungen bestehen die Beziehungen

$$\sigma_x=2\,G\left(\varepsilon_x+\frac{e}{m-1}\right),\qquad \sigma_y=2\,G\left(\varepsilon_y+\frac{e}{m-1}\right),\qquad \tau_{xy}=G\cdot\gamma_{xy}\quad\ldots\quad(2).$$

Die Gl. (1) lassen sich auf folgende Form bringen[1]:

$$\frac{2\,m}{m-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=0\,,\quad \frac{2\,m}{m-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=0\quad(3).$$

Setzen wir hierin

$$\frac{2\,m}{m-1}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=\varphi\,,\qquad \frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}=\psi\quad\ldots\ldots\quad(4).$$

so folgt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}\,,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(5),$$

d. h. zwischen φ und ψ bestehen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen; φ und ψ sind also Potentialfunktionen:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\quad\ldots\quad(6),\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0\quad\ldots\quad(7).$$

Die Funktion

$$\varphi=\frac{2\,m}{m-1}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=\frac{2\,m}{m-1}\cdot e=\frac{2}{E}\,(\sigma_x+\sigma_y)$$

stellt bis auf den konstanten Faktor $2/E$ die Summe der Normalspannungen in jedem Punkt dar, während $\psi=\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}$ die Verdrehung in jedem Punkt angibt. Setzen wir nun φ und ψ als bekannt voraus, so bestehen zur Ermittlung der Spannungen und Verzerrungen die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{m-1}{2\,m}\cdot\varphi\,,\qquad \frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}=\psi\quad\ldots\ldots\quad(8).$$

Durch die Ansätze (siehe Föppl »Drang und Zwang«)

$$\xi=-\frac{m+1}{4\,m}\cdot y\cdot\psi+{}^1/_2\,\Phi+\xi',\qquad \eta=-\frac{m+1}{4\,m}\cdot y\cdot\varphi+\frac{m-1}{4\,m}\,\Psi+\eta'\quad.\quad(9)$$

[1]) Siehe Föppl, »Drang und Zwang«, I. Bd., 2. Aufl., S. 266 ff.

werden die Gl. (8) befriedigt, dabei sind Φ und Ψ wiederum Potentialfunktionen, die mit φ und ψ derart zusammenhängen, daß

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \qquad \psi = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \ldots \ldots \quad (10).$$

Ferner sind ξ' und η' die Lösung der Gl. (8) unter der Voraussetzung, daß die rechten Seiten der Gleichungen verschwinden, so daß

$$\frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial \eta'}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial \eta'}{\partial x} - \frac{\partial \xi'}{\partial y} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (11),$$

d. h. ξ' und η' sind ebenfalls Potentialfunktionen und zwar stellen sie einen Spannungszustand dar, für welchen die Summe der Normalspannungen sowie die Verdrehung in jedem Punkt gleich Null ist.

Aus Gl. (9) folgt durch Differentiation nach den Achsrichtungen unter Beachtung der Gl. (10):

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{m+1}{4m} y \frac{\partial \psi}{\partial x} + {}^1/_2\, \varphi + \frac{\partial \xi'}{\partial x} \quad \ldots \ldots \quad (12\,a),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{m+1}{4m} \cdot y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{m+1}{4m} \varphi + \frac{m-1}{4m} \varphi + \frac{\partial \eta'}{\partial y} \quad \ldots \quad (12\,b),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{m+1}{4m} y \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{m+1}{4m} \psi - {}^1/_2\, \psi + \frac{\partial \xi'}{\partial y} \quad \ldots \quad (12\,c),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{m+1}{4m} \cdot y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{m-1}{4m} \psi + \frac{\partial \eta'}{\partial x} \quad \ldots \ldots \quad (12\,d).$$

Führt man die Gl. (12) in die Gl. (2) ein, so ergeben sich die Spannungen dargestellt durch Potentialfunktionen und deren Ableitungen:

$$\sigma_x = E\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{y}{4}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial \xi'}{\partial x}\right) \quad \ldots \ldots \quad (13),$$

$$\sigma_y = E\left(-\frac{y}{4}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{m}{m+1}\frac{\partial \xi'}{\partial x}\right) \quad \ldots \ldots \quad (14),$$

$$\tau_{xy} = E\left(-\frac{\psi}{4} - \frac{y}{4} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{m}{m+1}\frac{\partial \xi'}{\partial y}\right) \quad \ldots \ldots \quad (15).$$

2. Potentialfunktionen und konforme Abbildung. Es sei $P_{(x,y)}$ eine Potentialfunktion im Bereiche B der z-Ebene $(z = x + iy)$, erfülle also die Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

und nehme am Rande von B die dort vorgeschriebenen Werte an. Sehen wir nun x und y als Funktionen zweier Veränderlicher u und v an

$$x = x_{(u,v)}, \quad y = y_{(u,v)} \quad \ldots \ldots \quad (17),$$

so erhalten wir $P_{(x,y)} = P\left(x_{(u,v)}, y_{(u,v)}\right) = P_{(u,v)}$.

Durch zweimalige partielle Differentiation nach u und v und nachfolgende Addition erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = \frac{\partial P}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right) + 2\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$
$$+ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right] \quad (18).$$

Verlangen wir nun, daß die Abhängigkeit $x = x_{(u,v)}$ $y = y_{(u,v)}$ derart sei, daß die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}; \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

erfüllt sind, so daß also der Bereich B der z-Ebene $(z = x + iy)$ auf den Bereich K der w-Ebene $(w = u + iv)$ konform abgebildet wird, so folgt aus den Gl. (19):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (20),$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} = 0 \quad (21). \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 \quad (22).$$

Damit geht die Gl. (18) mit Rücksicht auf die Gl. (16) über in

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23),$$

d. h. $P_{(u,v)}$ genügt im Bereiche K der w-Ebene ebenfalls der Potentialgleichung.

Eine Potentialfunktion, die im Bereiche B der z-Ebene bestimmte Werte annimmt, stellt also im Bereiche K der w-Ebene wiederum eine Potentialfunktion dar, wenn die Bereiche B und K durch konforme Abbildung auseinander hervorgehen, und nimmt in den den Punkten der z-Ebene entsprechenden Punkten der w-Ebene dieselben Werte an[1]).

Im folgenden werde stets der Bereich B bzw. die Scheibe, deren Spannungszustand untersucht werden soll, auf die z-Ebene bezogen, jeder Punkt ist dargestellt durch $z=x+iy$, während der Bereich K den Einheitskreis darstelle, und

$$z=g(w), \qquad x=x_{(u,v)}, \qquad y=y_{(u,v)}$$

bilde den Kreis auf den Bereich B ab.

Weiterhin ist es nun zweckmäßig, im Bereiche K Polarkoordinaten einzuführen, also zu setzen

$$u=r\cos\alpha, \qquad v=r\sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\cos\alpha, \quad \frac{\partial u}{r\,\partial\alpha}=-\sin\alpha, \quad \frac{\partial v}{\partial r}=\sin\alpha, \quad \frac{\partial v}{r\,\partial\alpha}=\cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial u}=\cos\alpha, \quad \frac{\partial r}{\partial v}=\sin\alpha, \quad \frac{r\,\partial\alpha}{\partial u}=-\sin\alpha, \quad \frac{r\,\partial\alpha}{\partial v}=\cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (26),$$

daraus folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial v}{r\,\partial\alpha}, \quad \frac{\partial u}{r\,\partial\alpha}=-\frac{\partial v}{\partial r} \quad . \quad . \quad (27), \qquad \frac{\partial r}{\partial u}=\frac{r\,\partial\alpha}{\partial v}, \quad \frac{\partial r}{\partial v}=-\frac{r\,\partial\alpha}{\partial u} \quad . \quad . \quad (28),$$

daraus folgt weiter:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2=1 \quad (29). \qquad \left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2=\frac{1}{r^2} \quad (30). \qquad \frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial u}+\frac{\partial r}{\partial v}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial v}=0 \quad (31).$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial v^2}=\frac{1}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32). \qquad \frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Ferner bestehen folgende Beziehungen zwischen den Koordinaten x, y der z-Ebene und den Polarkoordinaten der w-Ebene. Es ist

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial r}&=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial x}{\partial u}\cos\alpha+\frac{\partial x}{\partial v}\sin\alpha\\
\frac{\partial y}{\partial r}&=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial y}{\partial u}\cos\alpha+\frac{\partial y}{\partial v}\sin\alpha\\
\frac{\partial x}{r\,\partial\alpha}&=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{r\,\partial\alpha}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{r\,\partial\alpha}=-\frac{\partial x}{\partial u}\sin\alpha+\frac{\partial x}{\partial v}\cos\alpha\\
\frac{\partial y}{r\,\partial\alpha}&=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{r\,\partial\alpha}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{r\,\partial\alpha}=-\frac{\partial y}{\partial u}\sin\alpha+\frac{\partial y}{\partial v}\cos\alpha
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34),$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{\partial y}{r\,\partial\alpha}; \qquad \frac{\partial x}{r\,\partial\alpha}=-\frac{\partial y}{\partial r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35);$$

weiter folgt aus Gl. (34) durch Quadrieren und Addieren

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{r\,\partial\alpha}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36).$$

Die Summe der Quadrate

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{r\,\partial\alpha}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2=\left(\frac{\partial y}{r\,\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{r\,\partial\alpha}\right)^2=\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{r\,\partial\alpha}\right)^2=N \quad (37)$$

soll in Zukunft mit N bezeichnet werden. $\sqrt{N}$ stellt für jeden Punkt das Vergrößerungsverhältnis dar.

[1]) Siehe Bieberbach: »Differentialgleichungen«. 1923, S. 292 ff.

Die Potentialgleichung (23) geht nach Einführung von Polarkoordinaten über in

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}=\frac{\partial P}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial P}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2\right]$$
$$+\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2}\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2\right]+2\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial \alpha}\left[\frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial u}+\frac{\partial r}{\partial v}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right]$$

und unter Berücksichtigung der Gl. (29) bis (33):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2}=0 \quad \ldots \ldots \quad (38).$$

3. Einführung der Polarkoordinaten des Einheitskreises in die Ausdrücke für die Spannungen im gegebenen polygonalen Bereich. In der Scheibe B stellt sich infolge der gegebenen Randbelastung ein ganz bestimmter eindeutiger Spannungszustand ein; in jedem Punkte einschließlich des Randes nimmt die Summe der Normalspannungen $\sigma_x+\sigma_y$ oder was dasselbe ist, die ebene Dehnung $e=\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}$, also unsere Potentialfunktion φ einen eindeutigen Wert an. Uebertragen wir die Randwerte von φ im Bereiche B auf den Rand des Kreises, so gibt die Lösung der Potentialgleichung für den Kreis in den durch die konforme Abbildung erhaltenen inneren Punkten dieselben Werte φ. Das Gesagte gilt in analoger Weise für die Potentialfunktion ψ. Würden wir die Randwerte von φ und ψ wirklich kennen, so würde, da die Lösung der Potentialgleichung für den Kreisbereich keine Schwierigkeiten bereitet, der Spannungszustand des Bereiches B bis auf einen solchen spezieller Art bestimmt sein wie aus den Gl. (13), (14), (15) ersichtlich ist. Nun hängt leider die Kenntnis der Randwerte φ und ψ von der Lösung selbst ab, aus den Randbedingungen, die als Einzellasten bzw. als Normal- oder Tangentialspannungen gegeben sind, lassen sie sich nicht ermitteln. Immerhin lassen sich Lösungen mit zunächst unbekannten Koeffizienten anschreiben,

$$\varphi=\varphi_{(r,\alpha)}\,; \qquad \psi=\psi_{(r,\alpha)},$$

ferner, da auch ξ' und η' Potentialfunktionen sind

$$\xi'=\xi'_{(r,\alpha)}\,; \qquad \eta'=\eta'_{(r,\alpha)}.$$

Mit diesen Lösungen gehen wir nunmehr in die Ausdrücke für die Spannungen im Bereich B, Gl. (13) bis (15), ein. Vorweg rechnen wir die partiellen Ableitungen nach x und y aus, es ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} \quad \ldots \ldots \quad (39).$$

Aus

$$r=r_{(x,y)}\,; \qquad \alpha=\alpha_{(x,y)}$$

folgen die vollständigen Differentiale

$$dr=\frac{\partial r}{\partial x}dx+\frac{\partial r}{\partial y}dy; \qquad d\alpha=\frac{\partial \alpha}{\partial x}dx+\frac{\partial \alpha}{\partial y}dy,$$

und daraus nach Division durch dr bzw. $d\alpha$, da $\frac{dr}{dr}=1$, $\frac{dr}{d\alpha}=0$ ist,

$$\left.\begin{aligned} 1&=\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}; & 1&=\frac{\partial \alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \alpha}+\frac{\partial \alpha}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha}\\ 0&=\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \alpha}+\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha}; & 0&=\frac{\partial \alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial \alpha}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (40).$$

Somit ist mit Rücksicht auf Gl. (35):

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \partial y/\partial r\\ 0 & \partial y/\partial \alpha\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\partial x/\partial r & \partial y/\partial r\\ \partial x/\partial \alpha & \partial y/\partial \alpha\end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{\partial y}{r\,\partial \alpha}}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial r}\right)^2}=\frac{\dfrac{\partial x}{\partial r}}{N} \quad \ldots \ldots \quad (41).$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{-\partial x/r\,\partial \alpha}{N}=\frac{\partial y/\partial r}{N}, \qquad \frac{r\,\partial \alpha}{\partial x}=-\frac{\partial y/\partial r}{N}=\frac{\partial x/r\,\partial \alpha}{N}, \qquad \frac{r\,\partial \alpha}{\partial y}=\frac{\partial x/\partial r}{N}=\frac{\partial y/r\,\partial \alpha}{N} \quad . \quad (41).$$

Mit diesen Werten gehen die Gl. (39) über in

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial \varphi}{r\,\partial \alpha}\cdot\frac{\partial x}{r\,\partial \alpha}\right)\frac{1}{N}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial \varphi}{r\,\partial \alpha}\cdot\frac{\partial y}{r\,\partial \alpha}\right)\frac{1}{N} \quad . \ . \quad (42).$$

Entsprechend gilt für jede andere Potentialfunktion:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{\partial P}{\partial r} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial P}{r\,\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x}{r\,\partial \alpha}\right) \frac{1}{N}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial r} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial P}{r\,\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y}{r\,\partial \alpha}\right) \frac{1}{N} \quad . \quad . \quad (43).$$

Die Gl. (13) bis (15) für die Spannungen σ_x, σ_y, τ lassen sich also schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= E\left[\quad \frac{\varphi}{2} + \frac{y}{4}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{r\,\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y}{r\,\partial \alpha}\right)\frac{1}{N} + \frac{m}{m+1}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x}{r\,\partial \alpha}\right)\frac{1}{N}\right] \\
\sigma_y &= E\left[\qquad - \frac{y}{4}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\,\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{r\,\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y}{r\,\partial \alpha}\right)\frac{1}{N} - \frac{m}{m+1}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x}{r\,\partial \alpha}\right)\frac{1}{N}\right] \\
\tau_{xy} &= E\left[-\frac{\psi}{4} - \frac{y}{4}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{r\,\partial \alpha}\,\frac{\partial x}{r\,\partial \alpha}\right)\frac{1}{N} + \frac{m}{m+1}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\,\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha}\,\frac{\partial y}{r\,\partial \alpha}\right)\frac{1}{N}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (44).$$

d. h. die Spannungen σ_x, σ_y, τ_{xy} lassen sich als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen r und α darstellen, denn y ist mit Rücksicht auf die geforderte konforme Abbildung ebenfalls von r und α abhängig.

Nun ist noch ein letzter Schritt zu tun, nämlich die Spannungen so darzustellen, daß die Randbedingungen befriedigt werden können, die als Spannungen σ_n normal und τ_{ns} tangential zum Rande des Bereiches B gegeben seien. Dazu erinnern wir uns der wesentlichsten Eigenschaften der konformen Abbildung.

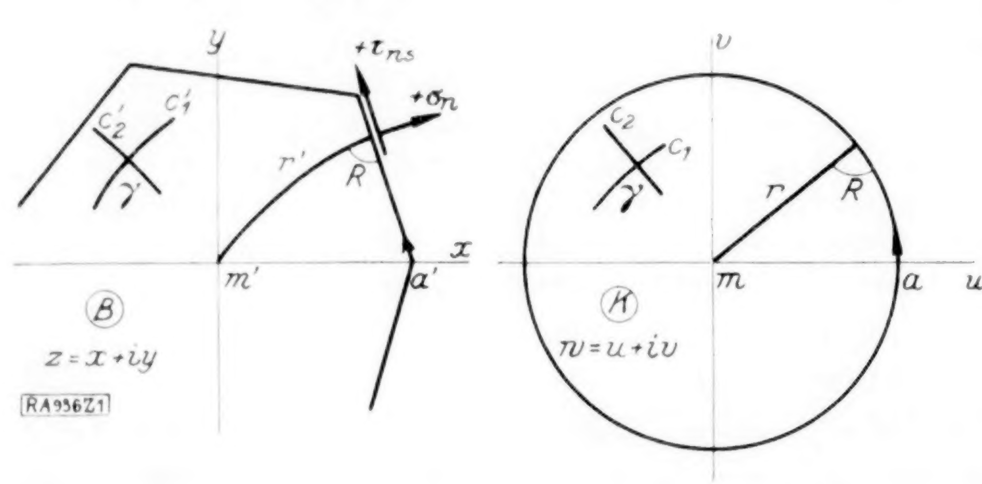


Abb. 1.

Durchläuft w den Einheitskreis, ausgehend etwa von a, so durchläuft z den Rand des Bereiches B, ausgehend von a'; jedem Punkt der Kreisperipherie entspricht ein Punkt des Randes von B, jeder Punkt des Bereiches K wird in einen bestimmten Punkt des Bereiches B abgebildet. Zwei Kurven C_1 und C_2, die in K den Winkel γ einschließen, werden auf zwei Kurven C_1' und C_2' abgebildet, der Winkel γ bleibt erhalten. Dem Radius des Einheitskreises entspricht eine Kurve im Bereiche B, die auf dem Rande senkrecht steht, da der rechte Winkel erhalten bleibt. Eine Ausnahme bilden die singulären Stellen, das sind die Eckpunkte des Bereiches B, doch berechtigt folgende Ueberlegung zu der Annahme, daß diese Singularitäten auf den Spannungszustand nur einen ganz unwesentlichen Einfluß haben können. Denken wir uns die Ecken durch einen beliebig kleinen Kreisbogen fortgeschnitten, so daß die Kanten Tangenten an diese Kreise werden, so kann dadurch der Spannungszustand unmöglich nennenswert beeinflußt werden. Andererseits wird die Funktion, die die konforme Abbildung des Kreises auf diesen Bereich vermittelt, keine Singularitäten mehr aufweisen, aber auch keine wesentlichen Abweichungen von der Abbildung des Polygons zeigen.

Wir werden nun versuchen, die Spannungen σ_n in Richtung der den Radien $\alpha =$ konst. entsprechenden Kurven, σ_s in Richtung der den Kreisen $r =$ konst. entsprechenden Kurven und τ_{ns} in diesen beiden Schnittrichtungen auszudrücken durch σ_x, σ_y, τ_{xy}. Bekanntlich sind die Spannungen in einer Schnittrichtung, die mit der x-Achse den Winkel ϑ einschließt,

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_n &= \sigma_x \cos^2\vartheta + \sigma_y \sin^2\vartheta + 2\,\tau_{xy} \sin\vartheta \cos\vartheta \\
\sigma_s &= \sigma_x \sin^2\vartheta + \sigma_y \cos^2\vartheta - 2\,\tau_{xy} \sin\vartheta \cos\vartheta \\
\tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin\vartheta \cos\vartheta + \tau_{xy} \cos 2\vartheta
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Schreiten wir nun längs eines Radius fort, so ist $\alpha =$ konst., somit

$$d\,\alpha = 0 = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cdot dy,$$

also ist die Differentialgleichung der den Radien $\alpha =$ konst. entsprechenden Kurven der z-Ebene gegeben durch die Steigung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \alpha / \partial x}{\partial \alpha / \partial y} = \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\partial y / \partial r}{\partial x / \partial r} = -\frac{\partial x / r\,\partial \alpha}{\partial y / r\,\partial \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Entsprechend erhalten wir für die den Kreisen $r = \text{konst.}$ entsprechenden Kurven die Steigung aus

$$dr = 0 = \frac{\partial r}{\partial x}\,dx + \frac{\partial r}{\partial y}\,dy$$

zu

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial r/\partial x}{\partial r/\partial y} = \operatorname{tg}\vartheta_1 = -\frac{\partial x/\partial r}{\partial y/\partial r} = \frac{\partial y/r\,\partial\alpha}{\partial x/r\,\partial\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (47).$$

Aus Gl. (46) folgt

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{(\partial y/\partial r)^2}{(\partial x/\partial r)^2}$$

und daraus

$$\sin^2\vartheta = \frac{(\partial y/\partial r)^2}{N}; \quad \cos^2\vartheta = \frac{(\partial x/\partial r)^2}{N}; \quad \sin\vartheta\cos\vartheta = \frac{\partial x/\partial r\cdot\partial y/\partial r}{N} \quad . \quad (48).$$

Unter Beachtung der Gleichungen (44) und (48) gehen die Gl. (45) über in

$$\sigma_n = E\left[\frac{\varphi}{2}\frac{(\partial x/\partial r)^2}{N} - \frac{\psi}{2}\frac{\partial x/\partial r\,\partial y/\partial r}{N} - \frac{y}{4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial\varphi}{r\,\partial\alpha}\frac{\partial y}{r\,\partial\alpha}\right)\frac{1}{N} + \frac{m}{m+1}\left(\frac{\partial\xi'}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r} - \frac{\partial\xi'}{r\,\partial\alpha}\cdot\frac{\partial x}{r\,\partial\alpha}\right)\frac{1}{N}\right] \quad (49).$$

$$\sigma_s = E\left[\frac{\varphi}{2}\frac{(\partial y/\partial r)^2}{N} + \frac{\psi}{2}\frac{\partial x/\partial r\,\partial y/\partial r}{N} + \frac{y}{4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial\varphi}{r\,\partial\alpha}\frac{\partial y}{r\,\partial\alpha}\right)\frac{1}{N} - \frac{m}{m+1}\left(\frac{\partial\xi'}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r} - \frac{\partial\xi'}{r\,\partial\alpha}\frac{\partial x}{r\,\partial\alpha}\right)\frac{1}{N}\right] \quad (50).$$

$$\tau_{ns} = -E\left[\frac{\varphi}{2}\frac{\partial x/\partial r\,\partial y/\partial r}{N} + \frac{\psi}{4}\frac{(\partial x/\partial r)^2 - (\partial y/\partial r)^2}{N} + \frac{y}{4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r} - \frac{\partial\varphi}{r\,\partial\alpha}\frac{\partial x}{r\,\partial\alpha}\right)\frac{1}{N} + \frac{m}{m+1}\left(\frac{\partial\xi'}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial\xi'}{r\,\partial\alpha}\frac{\partial y}{r\,\partial\alpha}\right)\frac{1}{N}\right] \quad (51).$$

Diese Gleichungen geben für jeden Punkt des Bereiches B die Spannungen in zwei bestimmten, durch die konforme Abbildung festgelegten Schnittrichtungen an; insbesondere stellt für $r = 1$ die Gl. (49) in jedem Randpunkt die Normalspannung, Gl. (51) die Tangentialspannung dar.

Damit sind wir am Ziel angelangt, denn setzen wir für φ, ψ und ξ' allgemeine Lösungen der Potentialgleichung für den Kreis ein, so lassen sich deren Konstante aus den Randbedingungen des Bereiches B nach den Gl. (49) und (51) ermitteln.

Die hier entwickelte Lösung des ebenen Spannungsproblems ist, da wir uns bisher keinerlei Beschränkung auferlegt haben, auf jede beliebig begrenzte und beliebig belastete Scheibe anwendbar. Trotzdem sind bei der Anwendung unter Umständen erhebliche Schwierigkeiten zu erwarten. Wenn auch theoretisch jeder der hier in Frage kommenden Bereiche auf den Kreis abbildbar ist, so ist doch die genaue Abbildungsfunktion bisher nur in vereinzelten Fällen wirklich bekannt. Allerdings läßt die Tatsache, daß sich die Ausdrücke für die Spannung Gl. (49) bis (51) doch nicht in eine geschlossene Form, etwa in eine einzige Fourierreihe entwickeln lassen und wir sie den Randbedingungen punktweise anpassen müssen, die Hoffnung berechtigt erscheinen, daß wir auf die exakte Abbildungsfunktion eventuell verzichten und uns vielleicht mit Näherungsabbildungen begnügen können. Eine zweite Schwierigkeit besteht in der Auffindung der Funktion ξ', die, wir mir scheint, in engem Zusammenhang mit der Abbildungsfunktion steht.

Als allgemeiner Ansatz für φ ist in Gl. (49) bis (51) einzuführen:

$$E\cdot\frac{\varphi}{2} = \Sigma_n\,(a_n r^n \cos n\alpha + b_n r^n \sin n\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (52).$$

Wie die Rechnung praktisch durchführbar ist, soll nun an Hand eines einfachen Beispiels gezeigt werden, das aber trotz seiner Einfachheit eine ganz erhebliche Rechenarbeit erfordert.

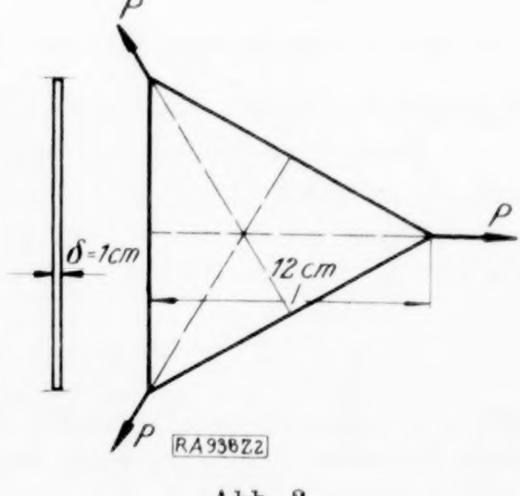


Abb. 2.

4. Beispiel. Die durch 3 Einzelkräfte in den Ecken belastete gleichseitige Dreiecksscheibe. Eine Scheibe von gleichseitiger Dreiecksform und nebenstehenden Abmessungen werde in den Ecken durch drei gleichgroße Einzelkräfte $P = 5\,t$ belastet.

Die Abbildung eines regelmäßigen n-Ecks auf den Einheitskreis, welche die Mittelpunkte beider Bereiche ineinander überführt, wird vermittelt durch die Funktion

$$z = \int_0^w \frac{dw}{(1-w^n)^{2/n}} \qquad (53)^1),$$

wenn $w = u + iv$ einen Punkt des Kreisbereiches und $z = x + iy$ einen Punkt des n-Ecks darstellt. Für das gleichseitige Dreieck $n = 3$ lautet die Abbildungsfunktion demnach

$$z = \int_0^w \frac{dw}{(1-w^3)^{2/3}} \qquad (54).$$

Entwickeln wir den Nenner des Integranden nach Potenzen von w[2]), so erhalten wir

$$z = \int_0^w dw\,(1-w^3)^{-2/3} = \int_0^w dw\left(1 + \frac{2}{3}w^3 + \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}w^6 + \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{9}w^9 + \ldots\right).$$

Die gliedweise Integration ergibt

$$z = x + iy = w + \frac{2}{3}\cdot\frac{w^4}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{w^7}{7} + \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{w^{10}}{10} + \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{w^{13}}{13} + \ldots$$

mit

$$w = r(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha), \qquad w^n = r(\cos n\alpha + i\cdot\sin n\alpha)$$

erhalten wir nach Gleichsetzen der realen und imaginären Teile für die beiden reellen Größen x und y die Reihen

$$x = r\cos\alpha + \frac{2}{3}\cdot\frac{r^4}{4}\cos 4\alpha + \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{r^7}{7}\cdot\cos 7\alpha + = \Sigma\,\frac{c_n}{3n+1}\,r^{3n+1}\cos(3n+1)\alpha \qquad (55),$$

$$y = r\sin\alpha + \frac{2}{3}\cdot\frac{r^4}{4}\sin 4\alpha + \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{r^7}{7}\cdot\sin 7\alpha + = \Sigma\,\frac{c_n}{3n+1}\,r^{3n+1}\sin(3n+1)\alpha \qquad (56),$$

wo

$$c_0 = 1, \qquad c_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdots\frac{3n-1}{3n}.$$

Die partiellen Ableitungen nach r bzw. α sind

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial y}{r\,\partial\alpha} = \cos\alpha + \frac{2}{3}\cdot r^3\cos 4\alpha + \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot r^6\cos 7\alpha + \ldots = \Sigma\,c_n r^{3n}\cos(3n+1)\alpha \qquad (57),$$

$$\frac{\partial x}{r\,\partial\alpha} = -\frac{\partial y}{\partial r} = -\sin\alpha - \frac{2}{3}r^3\sin 4\alpha - \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot r^6\sin 7\alpha - \ldots = -\Sigma\,c_n r^{3n}\sin(3n+1)\alpha \qquad (58).$$

Die Kreise $r = 1/4,\ 1/2,\ 3/4,\ 1$ und die Radien $\pi/12,\ 2\pi/12,\ 3\pi/12$ werden in bestimmte Kurven abgebildet. Durch die Gl. (55) und (56) lassen sich diese punktweise festlegen, und die Gl. (57) und (58) ermöglichen auf Grund der Gl. (46) und (47) die Angabe der Steigung in jedem Punkt. Das Ergebnis der Rechnung zeigt Abb. 3. Der Einheitskreis wird auf ein gleichseitiges Dreieck von ganz bestimmter Größe abgebildet. Da die Reihe (55) für $\alpha = 0$ sehr schlecht konvergiert, wurde der Wert von x für $\alpha = \pi$ ermittelt, er ergibt sich zu $\sim -0{,}8833$. Damit ist die Größe des Dreiecks festgelegt. Um den Kreis auf das vorliegende Dreieck, dessen Höhe 12 cm beträgt, abzubilden, müßten wir in (54) eine Konstante $C = \frac{4}{0{,}8833}$ einsetzen; ich ziehe indessen vor, diese Konstante von vornherein auszuschalten, indem ich $\frac{P}{C} = 5\cdot\frac{0{,}8833}{4} = 1\,104{,}125$ kg als Belastung des »Einheitsdreiecks« einführe und mich weiterhin nur mit diesem befasse.

Die Auswertung der Reihen (55) bis (58) erfolgte nur für den Winkelraum $\alpha = 0 \div \pi/3$ und zwar für die inneren Punkte für $\alpha = 0,\ \pi/12,\ \pi/6,\ \pi/4,\ \pi/3$; für die Randpunkte, da die spätere Rechnung eine größere Genauigkeit verlangt, auch für die Zwischenpunkte $\alpha = \pi/24,\ 3\pi/24,\ 5\pi/24,\ 7\pi/24$.

[1]) Siehe H. A. Schwarz, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, II. Bd., 1890, S. 76.

[2]) Ob der hier eingeschlagene Weg zur Berechnung der konformen Abbildung den Mathematiker befriedigt, oder ob er über andere Mittel verfügt, weiß ich nicht; mir kam es lediglich darauf an, auf einem leichtverständlichen Wege zum Ziele zu kommen, der aber gleichzeitig eine beliebige Genauigkeit der Abbildung zuließ.

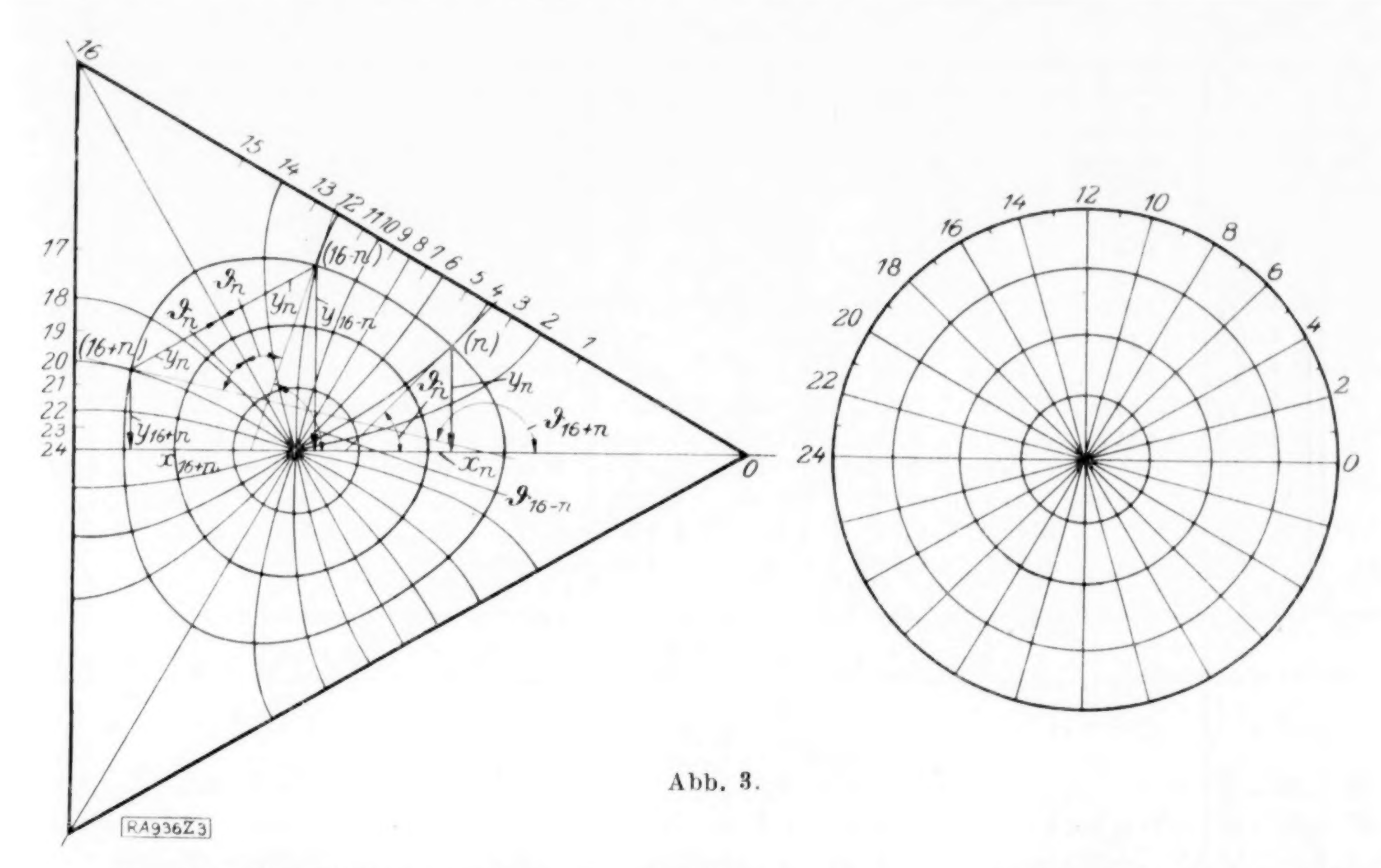


Abb. 3.

Werden die Radien fortlaufend numeriert, 0, 1, 2 . . . (siehe Abb. 3), so sind die übrigen Werte von x und y, wenn die Koordinaten mit dem entsprechenden Index geschrieben werden, zu errechnen durch

$$y_{16\mp n} = x_n \cdot {}^1/_2 \sqrt{3} \pm {}^1/_2\, y_n, \quad x_{16\mp n} = -\, {}^1/_2\, x_n \pm y_n \cdot {}^1/_2 \sqrt{3} \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots 8) \quad (59).$$

Die Steigung der Kurven $\alpha =$ konst., d. h. der Winkel ϑ, für die Punkte zwischen $\pi/3$ und $2\pi/3$ bzw. $2\pi/3$ und π ist

$$\vartheta_{16\mp n} = 120^0 \mp \vartheta_n \quad (n = 0, 1, 2, 3 \ldots 8) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (60).$$

Die bei der späteren Rechnung gebrauchten Werte sind zum Teil und zwar für $r = 1$ und $r = {}^1/_2$ in Zahlentafel 1 zusammengestellt.

Für die Randpunkte des Dreiecksbereiches lassen sich ohne weitere Rechnung über die Beiwerte in den Ausdrücken für die Spannungen noch folgende Angaben machen, die durch die Rechnung natürlich bestätigt werden:

Für $\alpha = 0$ ist $\vartheta = 0$, also

$$\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2}{N} = 1, \quad \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2}{N} = 0, \quad \frac{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r}}{N} = 0, \quad \frac{\frac{\partial x}{\partial r}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} = 0, \text{ da } \sqrt{N} = \infty, \quad \frac{\frac{\partial y}{\partial r}}{N} = 0 \quad (61)$$

für die Dreiecksseite, die dem Kreisbogen $\alpha = 0$ bis $\alpha = 2\pi/3$ entspricht, ist $\vartheta = 60^0$, also

$$\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2}{N} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2}{N} = \frac{3}{4}, \quad \frac{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r}}{N} = \frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad \frac{\frac{\partial x}{\partial r}}{N} = \frac{1}{2\sqrt{N}}, \quad \frac{\frac{\partial y}{\partial r}}{N} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{N}} \quad . \quad (62),$$

für $\alpha = 2\pi/_3$ ist $\vartheta = 120^0$, also

$$\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2}{N} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2}{N} = \frac{3}{4}, \quad \frac{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r}}{N} = -\frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad \frac{\frac{\partial x}{\partial r}}{N} = -\frac{1}{2\sqrt{N}} = 0, \quad \frac{\frac{\partial y}{\partial r}}{N} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{N}} = 0 \quad (63)$$

für die Dreiecksseite, die dem Kreisbogen $\alpha = 2\pi/3$ bis $\alpha = 4\pi/3$ entspricht, ist $\vartheta = \pi$, also

$$\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2}{N} = 1, \quad \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2}{N} = 0, \quad \frac{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r}}{N} = 0, \quad \frac{\frac{\partial x}{\partial r}}{N} = -\frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \frac{\frac{\partial y}{\partial r}}{N} = 0 \quad . \quad . \quad (64).$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns nun wieder unserer eigentlichen Aufgabe zuwenden. Bei der angenommenen in bezug auf drei Achsen symmetrischen Belastung der Scheibe ist $\varphi_{(\alpha)} = \varphi_{(-\alpha)}$, also läßt sich φ (Gl. 52) durch eine reine cos-

Zahlentafel 1.

r	α	x	y	$\sqrt{N}$	$1/\sqrt{N}$	$y/\sqrt{N}$	α	y	$\sqrt{N}$	$1/\sqrt{N}$	$y/\sqrt{N}$
	0	1,7666	0	∞	0		$13\pi/24$	1,001	0,935	1,07	1,071
	$\pi/24$	1,12	0,37	1,9	0,527	0,195	$14\pi/24$	1,067	1,19	0,84	0,897
	$2\pi/24$	0,965	0,463	1,19	0,84	0,389	$15\pi/24$	1,155	1,9	0,527	0,61
	$3\pi/24$	0,845	0,529	0,935	1,07	0,566	$16\pi/24$	1,528	∞	0	0
	$4\pi/24$	0,75	0,587	0.794	1,26	0,74	$17\pi/24$	0,785	1,9	0,527	0,414
	$5\pi/24$	0,666	0,635	0,71	1,41	0,895	$18\pi/24$	0,602	1,19	0,84	0,507
$r = 1$	$6\pi/24$	0,588	0,6805	0,66	1,515	1,03	$19\pi/24$	0,466	0,935	1,07	0,5
	$7\pi/24$	0,513	0,723	0,64	1,5625	1,13	$20\pi/24$	0,356	0,794	1,26	0,449
	$8\pi/24$	0,4417	0,765	0,63	1,587	1,214	$21\pi/24$	0,259	0,71	1,41	0,365
	$9\pi/24$		0,807	0,64	1,5625	1,26	$22\pi/24$	0,169	0,66	1,515	0,256
	$10\pi/24$		0,849	0,66	1,515	1,285	$23\pi/24$	0,082	0,64	1,5625	0,1281
	$11\pi/24$		0,895	0,71	1,41	1,26	$24\pi/24$	0	0,63	1,587	0
	$\pi/2$		0,943	0,794	1,26	1,188					

		x	y	$\sqrt{N}$	ϑ	$\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$
	0	+ 0,5111	0	1,0931	0	1	0
	$\pi/12$	0.48797	+ 0,1391	1,0603	$18^0\,40$	+ 0,947	+ 0,320
	$\pi/6$	0,4273	0,2587	0,995	$34^0\,45$	0,821	0,570
	$\pi/4$	0,3436	0,3532	0,943	$48^0\,10$	0,667	0,745
	$\pi/3$	0,2451	0,4245	0,9245	60^0	0,5	0,866
	$5\pi/12$	0,1341	0,474	0,943	$71^0\,50$	0,312	0,950
$r = 1/2$	$\pi/2$	0,0103	0,499	0,995	$85^0\,15$	0,083	0,996
	$7\pi/12$	− 0,1235	0,492	1,0603	$101^0\,20$	− 0,197	0,981
	$2\pi/3$	− 0,2555	0,442	1,0931	120^0	− 0,5	0,866
	$3\pi/4$	− 0,3645	0,352	1,0603	$138^0\,40$	− 0,751	0,660
	$5\pi/6$	− 0,4377	0,241	0,995	$154^0\,45$	− 0,904	0,427
	$11\pi/12$	− 0,4777	0,121	0,943	$168^0\,10$	− 0,979	0,2051
	π	− 0,4906	0	0,9245	180^0	− 1	0

		$\cos^2\vartheta = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2/N$	$\cos\vartheta\sin\vartheta = \frac{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r}}{N}$	$\cos\vartheta/\sqrt{N} = \frac{\partial x}{\partial r}/N$	$\sin\vartheta/\sqrt{N} = \frac{\partial y}{\partial r}/N$	$y/2\ \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{N}}$	$y/2\ \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{N}}$	$\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2}{2N} = \cos^2\vartheta - \frac{1}{2}$
	0	1	0	+ 0,915	0	0	0	+ 0,5
	$\pi/12$	0,897	+ 0,303	0,893	0,302	+ 0,0621	0,021	0,397
	$\pi/6$	0,674	0,468	0,825	0,572	0,107	0,074	0,174
	$\pi/4$	0,4449	0,497	0,707	0,790	0,125	0,139	− 0,0551
	$\pi/3$	0,25	0,433	0.541	0,937	0,115	0,199	− 0,25
	$5\pi/12$	0,0973	0,296	0,331	1,007	0,078	0,239	− 0,4027
$r = 1/2$	$\pi/2$	0,0069	0,083	0,0834	1,001	0,021	0,25	− 0,4931
	$7\pi/12$	0,0388	− 0,1927	− 0,186	0,925	− 0,0457	0,228	− 0,4612
	$2\pi/3$	0,25	− 0,433	− 0,4575	0,792	− 0,101	0,175	− 0,25
	$3\pi/4$	0 564	− 0,4959	− 0,709	0,622	− 0,125	0,1095	+ 0,064
	$5\pi/6$	0.8172	− 0,3858	− 0,908	0,429	− 0,1095	0,052	0,3172
	$11\pi/12$	0,9584	− 0,2007	− 1,038	0,2175	− 0,063	0,0132	0,4584
	π	1	0	− 1,08	0	0	0	0.5

Reihe darstellen, und zwar nehmen nur die Koeffizienten mit durch 3 teilbarem Index einen von 0 verschiedenen Wert an, da $\varphi_{(\alpha)} = \varphi\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \varphi\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)$, somit

$$E \cdot \frac{\varphi}{2} = \sum_0^n a_{3n}\, r^{3n} \cos 3 n \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

und die Lösung für ψ lautet demnach

$$E \cdot \frac{\psi}{2} = \sum_1^n a_{3n}\, r^{3n} \sin 3 n \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66),$$

ferner ist

$$\frac{E}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \Sigma\, 3\,n\cdot a_{3n}\, r^{3n-1}\cos 3\,n\,\alpha, \qquad \frac{E}{2}\frac{\partial\varphi}{r\,\partial\alpha} = -\,\Sigma\, 3\,n\cdot a_{3n}\, r^{3n-1}\sin 3\,n\,\alpha.$$

Um über die Potentialfunktion ξ' Aufschluß zu gewinnen, stellen wir folgende Ueberlegung an: In den Punkten $\alpha = \pi/3$, $\alpha = \pi$, $\alpha = 5\,\pi/3$ einerseits, $\alpha = 0, 2\,\pi/3, 4\,\pi/3$ andrerseits nimmt die Summe der Normalspannungen auf Grund der angenommenen Belastung denselben Wert an. Ferner ist in diesen Punkten die Verdrehung $\psi = 0$. Auf Grund dieser Bedingungen läßt sich zeigen, daß folgende Gleichungen bestehen müssen:

$$\left(\frac{\partial\xi'}{r\,\partial\alpha}\right)_\pi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (67),$$

$$\frac{m}{m+1}\left(\frac{\partial\xi'}{\partial r}\right)_\pi = -\,2\,\frac{m}{m+1}\left(\frac{\partial\xi'}{\partial r}\right)_{\pi/3} \quad \ldots \ldots \quad (68),$$

$$\left(\frac{\partial\xi'}{r\,\partial\alpha}\right)_0 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (69),$$

$$\frac{m}{m+1}\left(\frac{\partial\xi'}{\partial r}\right)_0 = -\,2\,\frac{m}{m+1}\left(\frac{\partial\xi'}{\partial r}\right)_{2\pi/3} \quad \ldots \ldots \quad (70).$$

Die Bedingungen (67) bis (70) werden erfüllt durch den Ansatz

$$E\,\frac{m}{m+1}\,\frac{\partial\xi'}{\partial r} = \Sigma\, b_{3n}\, r^{3n}\cos(3\,n+1)\,\alpha, \quad E\cdot\frac{m}{m+1}\,\frac{\partial\xi'}{r\,\partial\alpha} = -\,\Sigma\, b_{3n}\, r^{3n}\sin(3\,n+1)\,\alpha \quad (71),$$

welcher andererseits, wie man sich leicht überzeugt, die Gleichung $\triangle\,\xi' = 0$ erfüllt. Mit den allgemeinen Ansätzen für φ, ψ (65), (66) und ξ' (71) gehen wir in die Gl. (49) bis (51) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}\sigma_n = {} & \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2}{N}\,\Sigma\, a_{3n}\, r^{3n}\cos 3\,n\,\alpha - \frac{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r}}{N}\,\Sigma\, a_{3n}\, r^{3n}\sin 3\,n\,\alpha \\ & - \frac{y}{2}\,\frac{\frac{\partial y}{\partial r}}{N}\,\Sigma\, 3\,n\,a_{3n}\, r^{3n-1}\cos 3\,n\,\alpha - \frac{y}{2}\,\frac{\frac{\partial y}{r\,\partial\alpha}}{N}\,\Sigma\, 3\,n\,a_{3n}\, r^{3n-1}\sin 3\,n\,\alpha \\ & + \frac{\frac{\partial x}{\partial r}}{N}\,\Sigma\, b_{3n}\, r^{3n}\cos(3\,n+1)\,\alpha - \frac{\frac{\partial y}{\partial r}}{N}\,\Sigma\, b_{3n}\, r^{3n}\sin(3\,n+1)\,\alpha \quad \ldots \quad (72),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_s = {} & \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2}{N}\,\Sigma\, a_{3n}\, r^{3n}\cos 3\,n\,\alpha + \frac{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r}}{N}\,\Sigma\, a_{3n}\, r^{3n}\sin 3\,n\,\alpha \\ & + \frac{y}{2}\,\frac{\frac{\partial y}{\partial r}}{N}\,\Sigma\, 3\,n\,a_{3n}\, r^{3n-1}\cos 3\,n\,\alpha + \frac{y}{2}\,\frac{\frac{\partial y}{r\,\partial\alpha}}{N}\,\Sigma\, 3\,n\,a_{3n}\, r^{3n}\sin 3\,n\,\alpha \\ & - \frac{\frac{\partial x}{\partial r}}{N}\,\Sigma\, b_{3n}\, r^{3n}\cos(3\,n+1)\,\alpha + \frac{\frac{\partial y}{\partial r}}{N}\,\Sigma\, b_{3n}\, r^{3n}\sin(3\,n+1)\,\alpha \quad \ldots \quad (73),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{ns} = {} & -\,\frac{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r}}{N}\,\Sigma\, a_{3n}\, r^{3n}\cos 3\,n\,\alpha - \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2}{2\,N}\,\Sigma\, a_{3n}\, r^{3n}\sin 3\,n\,\alpha \\ & - \frac{y}{2}\,\frac{\frac{\partial x}{\partial r}}{N}\,\Sigma\, 3\,n\,a_{3n}\, r^{3n-1}\cos 3\,n\,\alpha + \frac{y}{2}\,\frac{\frac{\partial y}{\partial r}}{N}\,\Sigma\, 3\,n\,a_{3n}\, r^{3n-1}\sin 3\,n\,\alpha \\ & - \frac{\frac{\partial y}{\partial r}}{N}\,\Sigma\, b_{3n}\, r^{3n}\cos(3\,n+1)\,\alpha - \frac{\frac{\partial x}{\partial r}}{N}\,\Sigma\, b_{3n}\, r^{3n}\sin(3\,n+1)\,\alpha \quad \ldots \quad (74).\end{aligned}$$

Nun ist zu überlegen, wie wir die noch unbekannten Koeffizienten a_{3n} und b_{3n} am zweckmäßigsten aus den Randbedingungen des Problems ermitteln. Es ergeben sich in der Hauptsache folgende Möglichkeiten:

1. Das Idealste wäre, die Ausdrücke für σ_n und τ_{ns} je in eine unendliche Fouriersche Reihe zu entwickeln und die Randbelastung ebenfalls in dieser Weise dar-

zustellen. Ersteres bietet leider erhebliche Schwierigkeiten und ist mir bisher nicht gelungen.

2. Entwicklung in Fouriersche Reihen mit einer beschränkten Anzahl von Gliedern. Dazu ist erforderlich, da sich Einzellasten durch eine solche Reihe nicht darstellen lassen, statt dieser eine bestimmte Spannungsverteilung über einen Winkelraum ε vorzunehmen, wobei ε recht klein gewählt werden muß, da das Vergrößerungsverhältnis der Abbildung nach den Eckpunkten zu nach ∞ geht, d. h. ein verhältnismäßig kleiner Kreisbogen wird in den Ecken auf ein verhältnismäßig großes Stück der Dreieckseite abgebildet. Daraus ist zu schließen, daß die Anzahl n der Glieder der Fourierschen Reihe recht groß gewählt werden müßte.

3. Die Spannungen aus den Eckkräften werden errechnet wie im unbegrenzten Winkelraum und überlagert. Die sich in den Dreieckseiten ergebenden Randspannungen werden mit umgekehrten Vorzeichen als neue Randwerte eingeführt, und der sich aus diesen ergebende Spannungszustand ist dem ersteren zu überlagern.

Dieser Weg, den wir für unsere Rechnung wählen wollen, hat den Vorteil, daß einerseits die Einzelkräfte für die weitere Rechnung ausgeschaltet werden, andererseits nehmen die Eckpunkte in der Randbelastung jetzt keine besondere Stellung mehr ein und können unter Umständen, wenn sich bei der Aufstellung der Gleichungen Schwierigkeiten ergeben sollten, übergangen werden.

Abb. 4.

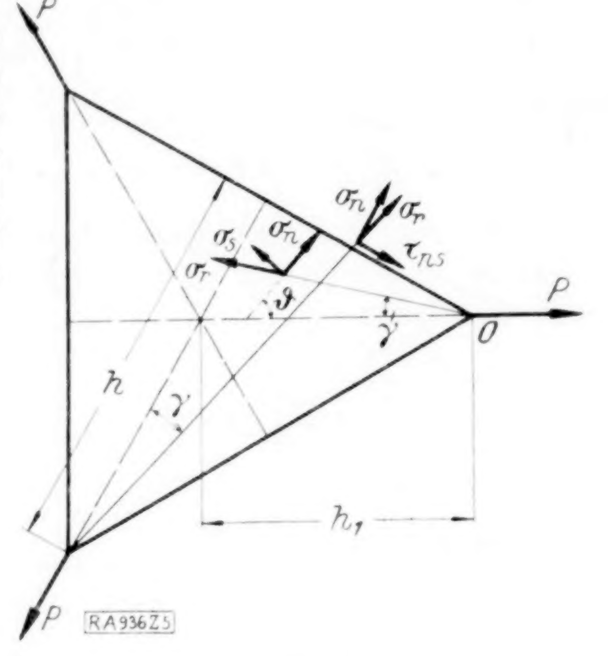


Abb. 5.

Die Spannungen im unbegrenzten Winkelraum werden errechnet nach der von Herrn Professor Grüning angegebenen Formel:

$$\sigma_r = \frac{2P}{r\cdot\delta}\left(\frac{\cos\xi\cos\varphi}{\alpha+\sin\alpha} - \frac{\sin\xi\sin\varphi}{\alpha-\sin\alpha}\right), \quad \sigma_\varphi = 0, \quad \tau = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (75).$$

Sie nimmt in unserem Fall: $\delta = 1$, $\xi = 0$, $\varphi = \gamma$ (s. Abb. 5) die sehr einfache Form an:

$$\sigma_r = \frac{2P}{r}\;\frac{\cos\gamma}{\pi/3+\sin\pi/3} = 1{,}04535\,P\,\frac{\cos\gamma}{r}$$

mit $P = 1104{,}125$:

$$\sigma_r = 1154{,}197\,\frac{\cos\gamma}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76).$$

Für die Randpunkte ist $r = \dfrac{h}{\cos\gamma} = \dfrac{2{,}6499}{\cos\gamma}$; somit $\sigma_r = 436{,}1\cos^2\gamma$ und die Randspannungen sind

$$\sigma_n = \sigma_r\cdot\cos^2\gamma = 436{,}1\cos\gamma^4, \qquad \tau_{ns} = \sigma_r\cdot\sin\gamma\cdot\cos\gamma = 436{,}1\cos^3\gamma\cdot\sin\gamma.$$

In den Dreiecksseiten ruft nur jeweils die gegenüberliegende Kraft Randspannungen σ_n und τ_{ns} hervor. In nachstehender Zahlentafel 2 sind diese Randspannungen angegeben.

Zahlentafel 2.

Punkt	α	σ_n	τ_{ns}	Punkt	α	σ_n	τ_{ns}
1	$\pi/24$	+ 368,9	− 109	5	$5\pi/24$	+ 427,4	− 42,1
2	$2\pi/24$	+ 394,4	− 89,8	6	$6\pi/24$	+ 432,6	− 27,7
3	$3\pi/24$	+ 410,4	− 72,4	7	$7\pi/24$	+ 435,2	− 13,5
4	$4\pi/24$	+ 420,4	− 56,6	8	$8\pi/24$	+ 436,1	0

Die im Gleichgewichtszustand I — Eckkräfte P, Randbelastung σ_n und τ_{ns} nach Zahlentafel 2 — im Innern auftretenden Spannungen wollen wir zunächst außer Acht lassen und uns nur mit der Frage beschäftigen, welcher Spannungszustand stellt sich in der Dreiecksscheibe ein, wenn wir die eben errechneten Randwerte nach Umkehrung der Vorzeichen als Randbelastung einführen — Gleichgewichtszustand II —, so daß nach Ueberlagerung beider Zustände sich in den Kanten die Spannungen $\sigma_n = 0$ und $\tau_{ns} = 0$ ergeben und in den Ecken die Einzellasten P wirken.

Setzen wir in den Ausdrücken für die Spannungen (72) und (74) $r = 1$, $\alpha = n \cdot \pi/24$, $n = 1, 2, 3, 4 \ldots 24$, so läßt sich für jeden Punkt eine lineare Gleichung für σ_n und eine für τ_{ns} anschreiben, die als Unbekannte nur die a_{3n} und b_{3n} enthalten.

Die Gleichungen, die wir für $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = 2\pi/3$ aufstellen, wollen wir vorweg betrachten; wir erhalten für $\alpha = 0$:

a) $(\sigma_n)_0 = a_0 + a_3 + a_6 + \ldots + \frac{1}{\sqrt{N}} (b_0 + b_3 + b_6 + \ldots)$

b) $\tau = 0$. Für $\alpha = 2\pi/3$:

c) $(\sigma_n)_{2\pi/3} = {}^1/_4 (a_0 + a_3 + a_6 + \ldots) - \frac{1{,}528}{4} \sqrt{\frac{3}{N}} (3a_3 + 6a_6 + 9a_9 + \ldots) - {}^1/_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{N}} (b_0 + b_3 + b_6 + \ldots)$

d) $(\tau_{ns})_{2\pi/3} = 0 = {}^1/_4 \sqrt{3} (a_0 + a_3 + a_6 + \ldots) + \frac{1{,}528}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{N}} (3a_3 + 6a_6 + \ldots)$

$$+ {}^1/_2 \cdot \sqrt{\frac{3}{N}} (b_0 + b_3 + b_6 + \ldots).$$

Setzt man hierin $\sqrt{N} = \infty$, so ergibt sich ein Widerspruch in a) und c) einerseits, da die linken Seiten einander gleich sind $(\sigma_n)_0 = (\sigma_n)_{2\pi/3}$; andererseits in d), da $(\tau)_{2\pi/3} = 0$ sein muß. Addieren wir Gl. c) und d), nachdem d) mit $\sqrt{3}$ multipliziert ist, so ergibt sich unter der Voraussetzung $(\tau)_{2\pi/3} = 0$:

$$(\sigma_n)_{2\pi/3} = (\sigma_n)_0 = a_0 + a_3 + a_6 + \ldots + \sqrt{\frac{1}{N}} (b_0 + b_3 + b_6 + \ldots).$$

Wie sich bei der späteren Rechnung zeigen wird, ergibt sich $(\tau)_{2\pi/3} = 0$ aber nur, wenn die Randbedingung in **jedem** Punkt genau erfüllt ist, in diesem Fall geht $\Sigma b_{3n} \to \infty$, womit der Widerspruch seine Erklärung findet.

Da wir die Lösung den vorgeschriebenen Randwerten nur in einzelnen Punkten anpassen, wobei wir mit der Genauigkeit natürlich beliebig weit gehen können, schließen wir die Eckpunkte selbst aus, ohne damit einen bedenklichen Fehler zu begehen, da es uns ja frei steht, in nächster Nähe der Ecke schon den vorgeschriebenen Randwert zu erreichen. Im Verlaufe der weiteren Rechnung wird der Grad der Genauigkeit des Resultates bei verschiedener Anzahl vorgegebener Randwerte deutlich in die Erscheinung treten.

Zunächst wurde die Rechnung durchgeführt, für den Fall, daß in $\alpha = \pi/6$, $\pi/2$, $5\pi/6$, ferner in $\alpha = \pi/3$ und π die Randbedingungen vorgeschrieben wurden. Für die Punkte 4, 8, 12, 20 läßt sich **je eine** Gleichung für die Normalspannung σ_n und Tangentialspannung τ_{ns}, in 24 **eine** Gleichung für σ_n anschreiben. Im ganzen stehen also 9 Gleichungen zur Verfügung. Um Klarheit darüber zu haben, wieviel Unbekannte wir in diese 9 Gleichungen aufnehmen dürfen, überlegen wir folgendes: Durch die vorgeschriebenen Randwerte von σ_n und τ_{ns} in den angegebenen Punkten sind in diesen Punkten auch φ, ψ, $\frac{\partial \xi'}{\partial r}$ und $\frac{\partial \xi'}{r \partial \alpha}$ bestimmt. Diese Werte mögen mit dem Index des zugehörigen Punktes (s. Abb. 3) bezeichnet werden; dann lassen sich folgende Gleichungen hinschreiben:

I.	II.
4) $a_0 \quad - a_6 = \left(E \frac{\varphi}{2}\right)_4$	4') $+ a_3 = \left(E \frac{\psi}{2}\right)_4$
8) $a_0 - a_3 + a_6 = \left(E \frac{\varphi}{2}\right)_8$	
12) $a_0 \quad - a_6 = \left(E \frac{\varphi}{2}\right)_{12}$	12') $- a_3 = \left(E \frac{\psi}{2}\right)_{12}$
20) $a_0 \quad - a_6 = \left(E \frac{\varphi}{2}\right)_{20}$	20') $+ a_3 = \left(E \frac{\psi}{2}\right)_{20}$
24) $a_0 - a_3 + a_6 = \left(E \frac{\varphi}{2}\right)_{24}$	

III.

$$4)\ +\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,b_0 - \tfrac{1}{2}\,b_3 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,b_6 = \frac{E\,m}{m+1}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_4$$

$$8)\ +\tfrac{1}{2}\,b_0 - \tfrac{1}{2}\,b_3 - \tfrac{1}{2}\,b_6 = \frac{E\,m}{m+1}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_8$$

$$12)\ +b_3 = \frac{E\,m}{m+1}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_{12}$$

$$20)\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,b_0 - \tfrac{1}{2}\,b_3 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,b_6 = \frac{E\,m}{m+1}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_{20}$$

$$24)\ -b_0 + b_3 - b_6 = \frac{E\,m}{m+1}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_{24}$$

IV.

$$(4')\ -\tfrac{1}{2}\,b_0 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,b_3 + \tfrac{1}{2}\,b_6 = \frac{E\,m}{m+1}\left(\frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha}\right)_4$$

$$(8')\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,b_0 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,b_3 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,b_6 = \frac{E\,m}{m+1}\left(\frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha}\right)_8$$

$$(12')\ -b_0 + b_6 = \frac{E\,m}{m+1}\left(\frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha}\right)_{12}$$

$$(20')\ -\tfrac{1}{2}\,b_0 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,b_3 + \tfrac{1}{2}\,b_6 = \frac{E\,m}{m+1}\left(\frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha}\right)_{20}$$

Gleichungssatz I und II liefern 3 Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten a_n; ebenso sind zur Ermittlung der b_n in den 9 Gleichungen der Sätze III und IV nur 3 voneinander unabhängige Gleichungen enthalten. Um das zu erkennen, stellen wir die Gl. (71) den Gl. (55) und (56) gegenüber. Der Vergleich lehrt, daß den Gleichungen (59) analoge Gleichungen für $\frac{\partial \xi'}{\partial r}$ und $\frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha}$ bestehen müssen, es gelten die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_{16\mp n} &= -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_n \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha}\right)_n \\ \left(\frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha}\right)_{16\mp n} &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_n \pm \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha}\right)_n\end{aligned}\right\}\quad (n = 0, 1, 3, \ldots 8),$$

und daraus folgt:

$$\text{a)}\quad \left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_{16-n} + \left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_{16+n} = -\left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_n$$

$$\text{b)}\quad \sqrt{3}\left(\frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha}\right)_{16-n} = -2\left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_n - \left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_{16-n} = -\left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_n + \left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_{16+n}$$

$$\text{c)}\quad \sqrt{3}\left(\frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha}\right)_{16+n} = -\left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_n + \left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_{16-n} = -2\left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_n - \left(\frac{\partial \xi'}{\partial r}\right)_{16+n}$$

$$\text{d)}\quad \left(\frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha}\right)_n = \left(\frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha}\right)_{16-n} - \left(\frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha}\right)_{16+n}.$$

Unter Beachtung der Gl. (68) und vorstehender Gleichung a) und d) erkennt man, daß sowohl Gleichungssatz III als auch Gleichungssatz IV sich auf 3 Gleichungen zurückführen läßt. Die Gleichungen b), c), d) schließlich sagen aus, daß die Werte $\frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha}$ durch $\frac{\partial \xi'}{\partial r}$ bestimmt sind, und somit können die b_n aus einem der Sätze, III oder IV, eindeutig bestimmt werden. Daraus ist ersichtlich, daß bei dieser Anzahl ausgezeichneter Punkte für a_n und b_n je 3 voneinander unabhängige Gleichungen aufgestellt werden können, somit die Zahl der Unbekannten $2 \cdot 3 = 6$ gewählt werden muß.

Allgemein ist die Zahl der Unbekannten für die a_n und b_n je gleich der Anzahl n der in einer Dreiecksseite liegenden ausgewählten Punkte, während $3\,n$ Gleichungen zu ihrer Ermittlung zur Verfügung stehen.

Nach Berechnung der Koeffizienten der a_n und b_n in den Gl. (72) und (74) ergeben sich für den zunächst vorliegenden Fall von $2 \cdot 3$ Unbekannten die 9 Gleichungen:

Gl.	a_0	a_3	a_6	$1/N$	b_0	b_3	b_6	
4	+ 0,25	− 0,988	+ 1,673	1,26		− 1		$(\sigma_n)\,\pi/6$
12	+ 0,25	+ 1,324	+ 2,836	1,26	$-0{,}5\sqrt{3}$	+ 0,5	$+0{,}5\sqrt{3}$	$(\sigma_n)\,\pi/6$
20	+ 1	+ 0,6735	− 1	1,26	$+0{,}5\sqrt{3}$	+ 0,5	$-0{,}5\sqrt{3}$	$(\sigma_n)\,\pi/6$
4′	− 0,433	+ 1,211	+ 1,543	1,26	− 1		+ 1	$(\tau_{ns})\,\pi/6$
12′	− 0,433	− 1,793	+ 2,215	1,26	− 0,5	$-0{,}5\sqrt{3}$	+ 0,5	$(\tau_{ns})\,\pi/6$
20′		− 0,5	− 1,347	1,26	+ 0,5	$-0{,}5\sqrt{3}$	− 0,5	$(\tau_{ns})\,\pi/6$
8	+ 0,25	+ 1,33	− 2,91	1,587	− 0,5	+ 0,5	− 0,5	$(\sigma_n)\,\pi/3$
24	+ 1	− 1	+ 1	1,587	+ 1	− 1	+ 1	$(\sigma_n)\,\pi/3$
8′	− 0,433	+ 1,344	− 2,255	1,587	$-0{,}5\sqrt{3}$	$+0{,}5\sqrt{3}$	$-0{,}5\sqrt{3}$	$(\tau_{ns})\,\pi/3 = 0$

$\sqrt{\frac{1}{N}}$ ist hierin als gemeinsamer Faktor der b_n anzusehen. Wir finden aus diesen Gleichungen die folgenden:

Gleichungen		a_0	a_3	a_6	
$4 + 12 + 20$	IV	$+ 1,5$	$+ 1,001$	$+ 3,509$	$3\,(\sigma_n)_{\pi/6} = - 1261,2$
$4 - \frac{1}{\sqrt{3}}(12' + 20')$	(IV)	$+ 0,5$	$+ 0,3359$	$+ 1,1719$	$(\sigma_n)_{\pi/6}$
$4' - 12' + 20'$	IV'	0	$+ 2,504$	$- 2,019$	$3\,(\tau)_{\pi/6} = + 169,8$
$4' - \frac{1}{\sqrt{3}}(12 - 20)$	(IV')	0	$+ 0,8354$	$- 0,6717$	$(\tau_{ns})_{\pi/6}$
$8 + \frac{1}{2} \cdot 24$	VIII	$+ 0,75$	$+ 0,83$	$- 2,41$	$1,5\,(\sigma)_{\pi/3} = - 654,15$
$8' + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 24$	(VIII)	$+ 0,433$	$+ 0,478$	$- 1,389$	$0,5\sqrt{3}\,(\sigma_n)_{\pi/3}$

Somit lassen sich aus den 9 Gleichungen 6 Gleichungen für die 3 Unbekannten a_n allein herausschälen, die aber keine Widersprüche enthalten, da je 2 dasselbe aussagen. Wenn diese Bedingung in den Koeffizienten nicht überall genau erfüllt ist, so liegt das, wie man leicht einsieht, an Ungenauigkeiten in den Werten y, während größere Abweichungen auf einen Fehler in der Berechnung der Koeffizienten schließen lassen. Es liegt nahe und wäre möglich, die Koeffizienten der zuletzt gewonnenen Gl. (IV), (IV') und (VIII) direkt zu ermitteln; ich ziehe indessen den hier eingeschlagenen Weg vor, um nicht der darin gleichzeitig vorhandenen Kontrolle entbehren zu müssen. Die Auflösung der Gleichungen für die a_n ergibt

$$a_0 = - 920,1, \qquad a_3 = + 77,84, \qquad a_6 = + 11,84.$$

Nach Einsetzen dieser Werte lassen sich zur Ermittlung der Unbekannten b_0, b_3, b_6 9 Gleichungen angeben. Um deren Verträglichkeit miteinander zu zeigen, wählen wir die folgenden aus:

Gl.	$\sqrt{1/N}$	b_0	b_3	b_6	
4	1,26	0	$- 1$	0	$= - 420,4 + 287 = - 133,4$
$12 + 20$	1.26	0	$+ 1$	0	$= - 840,8 + 973 = + 132,2$
$12' + 20'$	1,26	0	$- \sqrt{3}$	0	$= 0 - 230 = - 132,8\sqrt{3}$
4'	1,26	$- 1$	0	$+ 1$	$= + 56,5 - 510 = - 453,4$
$12 - 20$	1,26	$- \sqrt{3}$	0	$+ \sqrt{3}$	$= 0 - 786 = - 453\sqrt{3}$
$12' - 20'$	1,26	$- 1$	0	$+ 1$	$= - 113,2 - 339 = - 452,2$
8	1,587	$- 0,5$	$+ 0,5$	$- 0,5$	$= - 436,1 + 162 = - 274,1$
24	1.587	$+ 1$	$- 1$	$+ 1$	$= - 436,1 + 986 = + 550$
8'	1,587	$- 0,5\sqrt{3}$	$+ 0,5\sqrt{3}$	$- 0,5\sqrt{3}$	$= 0 - 476 = - 274\sqrt{3}$

Demnach sind je 3 Gleichungen in Uebereinstimmung zu bringen (Kontrolle für die Rechnung!), so daß in Wirklichkeit nur 3 Gleichungen zur Verfügung stehen:

$$b_3 = + 105,5 \quad (4), \qquad - b_0 + b_6 = - 360,26, \quad (4'), \qquad - b_0 - b_6 = - 452,1 \quad (8).$$

Deren Lösung gibt

$$\begin{aligned} b_0 &= + 406,2 \\ b_3 &= + 105,5 \\ b_6 &= + 45,9 \\ \hline \Sigma\, b_n &= + 557,6 \end{aligned}$$

Nachdem die a_n und b_n gefunden sind, lassen sich die Spannungen in jedem Punkt errechnen. Zweckmäsig geschieht das in der Weise, daß zunächst die Summenwerte $E\frac{\varphi}{2}$, $E \cdot \frac{\psi}{2}$, $\frac{E}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, $\frac{E}{2}\frac{\partial \varphi}{r\,\partial \alpha}$, $\frac{E\,m}{m+1}\frac{\partial \xi'}{\partial r}$, $\frac{E\,m}{m+1}\frac{\partial \xi'}{r\,\partial \alpha}$ ermittelt werden. Auf Grund dieser

und der Zahlentafel 1 lassen sich dann nach den Gl. (72) und (74) die Spannungen σ_n und τ_{ns} berechnen, während σ_s sich am einfachsten aus $\sigma_s = E\frac{\varphi}{2} - \sigma_n$ ergibt. Verfährt man in dieser Weise und rechnet z. B. für $r = 1/2$ die Spannungen aus, so ergeben sich in diesen Punkten die Spannungen

$$\alpha = 0: \quad \sigma_n = -526 \text{ kg/cm}^2$$
$$\alpha = 2\pi/3: \quad \sigma_n = -430 \text{ »}$$

$$\alpha = \pi/3: \quad \sigma_n = -434 \text{ kg/cm}^2$$
$$\alpha = \pi: \quad \sigma_n = -513 \text{ »}$$
$$\alpha = \pi/3: \quad \tau_{ns} = +39 \text{ »}$$

$$\alpha = \pi/6: \quad \sigma_n = -469 \text{ kg/cm}^2$$
$$\alpha = \pi/2: \quad \sigma_n = -410 \text{ »}$$
$$\alpha = 5\pi/6: \quad \sigma_n = -509 \text{ »}$$

Ferner ist für $r = 0$

$$\alpha = \pi/3: \quad \sigma_n = -432 \text{ kg/cm}^2, \qquad \alpha = \pi: \quad \sigma_n = -514 \text{ kg/cm}^2.$$

Infolge der Symmetrie der Randbelastung in bezug auf drei Achsen müßten sich für $\alpha = 0$ und $2\pi/3$, für $\alpha = \pi/3$ und π, für $\alpha = \pi/6$, $\pi/2$, $5\pi/6$, usf. gleichgroße Spannungen ergeben, während hier Differenzen bis zu 100 kg/cm² auftreten, ferner müßte für $\alpha = \pi/3$ sich $\tau_{ns} = 0$ ergeben, während wir hier für τ einen Wert errechnet haben. Diese Unstimmigkeit hat ihren Grund darin, daß wir nach Einsetzen der a_n und b_n in die Gleichungen für die Spannungen zwar in den vorgeschriebenen Randpunkten die vorgeschriebenen Werte erhalten, daß im übrigen aber die so dargestellte Randbelastung nur noch Symmetrie in bezug auf eine Achse aufweist. Denn rechnen wir die Spannungen für die Zwischenpunkte $r = 1$, $\alpha = \pi/12$, $3\pi/12$, $5\pi/12$ usf. aus, so ergeben sich Randwerte, die teilweise erhebliche Abweichungen gegenüber den erwünschten (Zahlentafel 2) aufweisen, andererseits nur noch zur x-Achse Symmetrie zeigen. Diesem Uebelstand ist nur dadurch abzuhelfen, daß wir die Randwerte in engere Grenzen einschließen. Das kann in der Weise geschehen, daß wir in den Punkten, in denen die Randbedingungen erfüllt sind, den Randwert Null vorschreiben, in den Zwischenpunkten $\pi/12$, $3\pi/12$ usf. als neue Randwerte die Differenzen gegenüber den geforderten einführen und diesen Spannungszustand wiederum überlagern. Dazu ist aber die Berechnung der abweichenden Randwerte in den Zwischenpunkten erforderlich, die immerhin einige Mehrarbeit verursacht, und für die andererseits keine Kontrolle vorhanden ist. Ich ziehe deshalb vor, die genauere Rechnung mit den Randwerten nach Zahlentafel 2 wiederholt durchzuführen. Bei der zweiten Rechnung, Randbedingung erfüllt in $\pi/12$, $2\pi/12$, $3\pi/12$ usf., ergaben sich folgende Werte für die Konstanten

$$\begin{aligned} a_0 &= -938{,}095 & b_0 &= +448{,}28 \\ a_3 &= +107{,}825 & b_3 &= +138{,}89 \\ a_6 &= +28{,}525 & b_6 &= +96{,}72 \\ a_9 &= +11{,}976 & b_9 &= +70{,}34 \\ a_{12} &= +5{,}44 & b_{12} &= +51{,}70 \\ a_{15} &= +2{,}314 & b_{15} &= +33{,}43 \\ a_{18} &= +0{,}589 & b_{18} &= +17{,}47 \\ & & \Sigma\, b_n &= +856{,}83 \end{aligned}$$

und für die Spannungen $(r = 1/2)$

$$\begin{aligned} &\alpha = 0: \ \sigma_n = -497, && \alpha = \pi/3: \ \sigma_n = -457, && \alpha = \pi/6: \ \sigma_n = -472 \\ &\alpha = 2\pi/3: \ \sigma_n = -461, && \alpha = \pi: \ \sigma_n = -482, && \alpha = \pi/2: \ \sigma_n = -448 \\ & && \alpha = \pi/3: \ \tau_{ns} = +11, && \alpha = 5\pi/6: \ \sigma_n = -483 \end{aligned}$$

für die Spannungen $(r = 0)$ im Mittelpunkt

$$\alpha = \pi/3: \quad \sigma_n = -459, \qquad \alpha = \pi: \quad \sigma_n = -490.$$

Ein Vergleich mit den Werten der ersten Rechnung zeigt, daß die Spannungen hier bereits in sehr viel engere Grenzen eingeschlossen sind.

Eine dritte Rechnung wurde durchgeführt mit vorgeschriebenen Randwerten in $\pi/24$, $2\pi/24$, $3\pi/24$ usf., also in 15 Punkten einer Dreiecksseite. Die Zahl der Unbekannten ist somit $2 \cdot 15$, die der Gleichungen $3 \cdot 15 = 45$.

Die berechneten Werte von a_n und b_n sind

$a_0 = - 944,45$	$b_0 = + 464,21$
$a_3 = + 119,59$	$b_3 = + 150,41$
$a_6 = + 35,30$	$b_6 = + 114,86$
$a_9 = + 17,46$	$b_9 = + 94,37$
$a_{12} = + 10,30$	$b_{12} = + 81,15$
$a_{15} = + 6,61$	$b_{15} = + 69,69$
$a_{18} = + 4,41$	$b_{18} = + 59,50$
$a_{21} = + 2,94$	$b_{31} = + 51,46$
$a_{24} = + 1,97$	$b_{24} = + 43,43$
$a_{27} = + 1,24$	$b_{27} = + 36,93$
$a_{30} = + 0,76$	$b_{30} = + 30,2$
$a_{33} = + 0,38$	$b_{33} = + 24,84$
$a_{36} = + 0,09$	$b_{36} = + 20,08$
$a_{39} = - 0,07$	$b_{39} = + 13,64$
$a_{42} = - 0,16$	$b_{42} = + 8,30$
	$\Sigma\, b_n = 1263,08$

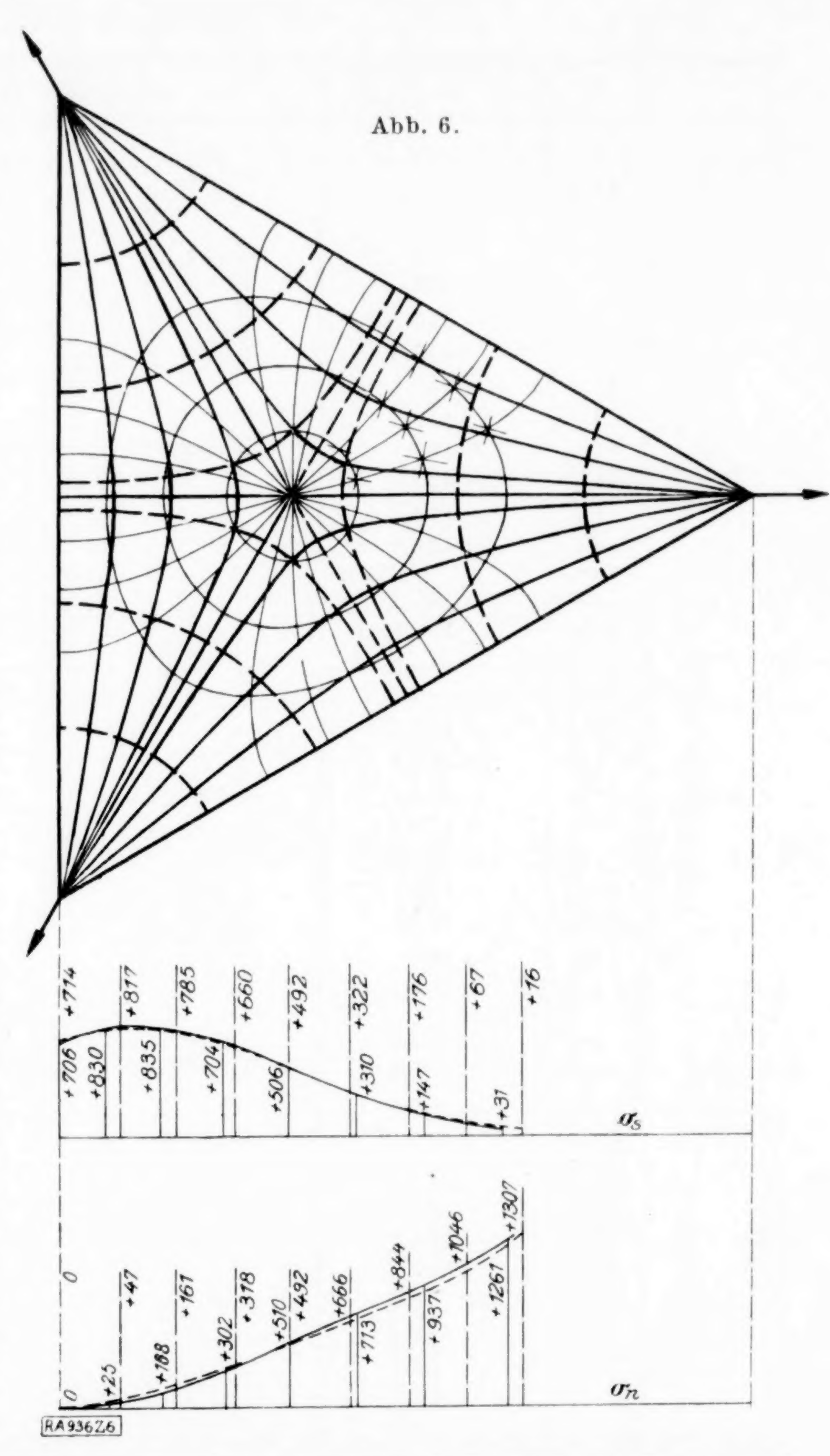


Abb. 6.

Die hierzu gehörigen Spannungen sind in Zahlentafel 3 (auf Seite 158) zusammengestellt. Die Spannungen σ_{n2}, σ_{s2}, τ_{ns2} des Zustandes II — zum Unterschied von den aus den Einzelkräften resultierenden Spannungen σ_{n1}, σ_{s1} τ_{ns1} des Zustandes I — wurden als Mittelwerte von je 2 bzw. 3 Spannungswerten errechnet. Durch die noch vorhandenen Differenzen tritt der Grad der Genauigkeit der Rechnung deutlich in die Erscheinung. Eine Gegenüberstellung etwa der Spannungen σ_n ($r = 1/2$ bzw. $r = 0$) für verschiedene Genauigkeit läßt auch die Konvergenz der Rechnung klar erkennen. Auffallend ist dabei, daß die Mittelwerte der 1. Rechnung sehr gute Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der zweiten und dritten Rechnung zeigen.

α	1. Rechnung	im Mittel	2. Rechnung	im Mittel	3. Rechnung	im Mittel
$r = 1/2$						
0	$\sigma_n = - 526$	478	− 497	479	− 485	478
$2\pi/3$	$\sigma_n = - 430$		− 461		− 471	
$\pi/3$	$\sigma_n = - 434$	473,5	− 457	469,5	− 465	470,5
π	$\sigma_n = - 513$		− 482		− 476	
$\pi/6$	$\sigma_n = - 469$		− 472		− 473	
$\pi/2$	$\sigma_n = - 410$	463	− 448	468	− 463	471
$5\pi/6$	$\sigma_n = - 509$		− 483		− 477	
$r = 0$						
$\pi/3$	$\sigma_n = - 432$	473	− 459	474,5	− 468	474
π	$\sigma_n = - 514$		− 490		− 480	

Nunmehr bleiben noch die Spannungen σ_{n1}, σ_{s1}, τ_{ns1} aus den Eckkräften zu berechnen. Dazu greifen wir zurück auf Gl. (76)

$$\sigma_r = 1154,197 \frac{\cos\gamma}{r}$$

Zahlentafel 3.

	α	σ_n	σ_{n2}	σ_{s2}	τ_{ns}	τ_{ns2}
	0	− 498	− 487	− 399	0	0
	$2\pi/_3$	− 475			− 14	
	$\pi/_{12}$	− 467,2			+ 45,5	+ 35
	$7\pi/_{12}$	− 458	− 468	− 442	− 31,5	− 35
	$9\pi/_{12}$	− 478			+ 30,4	+ 35
	$\pi/_6$	− 456,4			+ 40,3	+ 38
$r = 0{,}75$	$\pi/_2$	− 455,6	− 460	− 490	− 28,6	− 38
	$5\pi/_6$	− 468,8			+ 44,6	+ 38
	$\pi/_4$	− 447,1			+ 15,2	+ 16,8
	$5\pi/_{12}$	− 462,1	− 460	− 519	− 15,4	− 16,8
	$11\pi/_{12}$	− 469,2			+ 19,8	+ 16,8
	$\pi/_3$	− 456,6	− 460	− 530	+ 4,2	0
	π	− 462,7			0	
	0	− 485	− 478	− 451	0	0
	$2\pi/_3$	− 470,3			− 7,7	
	$\pi/_{12}$	− 480,9			+ 13,2	+ 8,4
	$7\pi/_{12}$	− 465,3	− 474	− 460	− 11	− 8,4
	$9\pi/_{12}$	− 475,6			+ 1	+ 8,4
	$\pi/_6$	− 472,6			+ 19,2	+ 11,9
$r = 0{,}5$	$\pi/_2$	− 463,1	− 471	− 474	− 8,3	− 11,9
	$5\pi/_6$	− 477,1			+ 8,2	+ 11,9
	$\pi/_4$	− 461,4			+ 8,8	+ 7,3
	$5\pi/_{12}$	− 460,1	− 463	− 492	− 4,8	− 7,3
	$11\pi/_{12}$	− 466,6			+ 8,2	+ 7,3
	$\pi/_3$	− 465	− 470	− 489	+ 5,6	0
	π	− 476,4			0	
	0	− 480,3	− 475	− 468	0	0
	$2\pi/_3$	− 469,5			− 6,8	
	$\pi/_{12}$	− 479,2			+ 6	+ 1,3
	$7\pi/_{12}$	− 465,5	− 473	− 470	− 4	− 1,3
	$9\pi/_{12}$	− 473,3			− 6	+ 1,3
	$\pi/_6$	− 474			+ 9,7	+ 2,3
$r = 0{,}25$	$\pi/_2$	− 464,1	− 472	− 473	− 0,6	− 2,3
	$5\pi/_6$	− 477			− 3,3	+ 2,3
	$\pi/_4$	− 471,4			+ 7,5	+ 0,7
	$5\pi/_{12}$	− 465,3	− 472	− 474	+ 2,5	− 0,7
	$11\pi/_{12}$	− 478,7			− 3	+ 0,7
	$\pi/_3$	− 467,5	− 474	− 472	+ 6,2	0
	π	− 481 3			0	
$r = 0$	0	− 480	− 474	− 470	0	0
	$2\pi/_3$	− 468			− 4,5	

oder mit
$$r = \sqrt{y^2 + (h_1 - x)^2}, \qquad \cos\gamma = \frac{h_1 - x}{r} \quad \text{(s. Abb. 5)}$$

$$\sigma_r = 1154{,}197 \cdot \frac{h_1 - x}{y^2 + (h_1 - x)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (77).$$

Daraus ergeben sich die Spannungen
$$\sigma_n = \sigma_r \cdot \cos^2(\gamma + \vartheta), \qquad \sigma_s = \sigma_r \cdot \sin^2(\gamma + \vartheta), \qquad \tau_{ns} = -\sigma_r \cdot \sin(\gamma + \vartheta)\cos(\gamma + \vartheta).$$

Es genügt, die Spannungen für die Punkte der positiven Halbebene aus der Einzellast in der Ecke 0 zu berechnen, durch Ueberlagerung erhalten wir die aus den drei Eckkräften resultierenden Spannungen. Zahlentafel 4 gibt die Zusammenstellung der beiden Belastungszustände. Während der Einfluß der Normalspannungen des Zustandes II erheblich ist, sind die Schubspannungen klein gegenüber denen des Zustandes I. Nach

Zahlentafel 4.

r		σ_{n_1}	σ_{s_1}	τ_{ns_1}	σ_{n_2}	σ_{s_2}	τ_{ns_2}	σ_n	σ_s	τ_{ns}	$\sigma_{\max}$	$\sigma_{\min}$	$\operatorname{tg} 2\delta = -\frac{2\tau}{\sigma_n - \sigma_s}$	δ	$\measuredangle$ mit x-Achse $\delta' = \vartheta - \delta$
1	0	∞	0	0											
	$\pi/12$	+ 395	+ 1571	− 90	− 395	− 488	+ 90	0	+ 1083	0	**+ 1083**	**0**			
	$\pi/6$	+ 420,5	+ 1391	− 56,6	− 420,5	− 551	+ 56,6	0	+ 840	0	**+ 840**	**0**			
	$\pi/4$	+ 432	+ 1326	− 27,7	− 432	− 591	+ 27,7	0	+ 735	0	**+ 735**	**0**			
	$\pi/3$	+ 436	+ 1310	0	− 436	− 604	0	0	+ 706	0	**+ 706**	**0**			
3/4	0	+ 1748	+ 430	0	− 487	− 399	0	+ 1261	+ 31	0	**+ 1261**	**+ 31**			
	$\pi/12$	+ 1046	+ 1008	− 577	− 468	− 442	+ 35	+ 578	+ 566	− 542	**+ 1114**	**+ 30**	+ 90,3	44° 40	− 14° 20
	$\pi/6$	+ 627	+ 1296	− 362	− 460	− 490	+ 38	+ 167	+ 806	− 324	**+ 942**	**+ 32**	− 1,015	67° 10	− 22°
	$\pi/4$	+ 500	+ 1363	− 135	− 460	− 519	+ 17	+ 40	+ 844	− 118	**+ 861**	**+ 23**	− 0,294	81° 50	− 28° 10
	$\pi/3$	+ 485	+ 1360	0	− 460	− 530	0	+ 25	+ 830	0	**+ 830**	**+ 25**			
1/2	0	+ 1415	+ 598	0	− 478	− 451	0	+ 937	+ 147	0	**+ 937**	**+ 147**			
	$\pi/12$	+ 1226	+ 769	− 327	− 474	− 460	+ 8	+ 752	+ 309	− 319	**+ 919**	**+ 141**	+ 1,435	27° 35	− 9°
	$\pi/6$	+ 889	+ 1069	− 369	− 471	− 474	+ 12	+ 418	+ 595	− 357	**+ 875**	**+ 139**	− 4,02	52°	− 17° 15
	$\pi/4$	+ 670	+ 1261	− 217	− 463	− 492	+ 7	+ 207	+ 769	− 210	**+ 839**	**+ 137**	− 0,764	71° 50	− 23° 40
	$\pi/3$	+ 597	+ 1324	0	− 470	− 489	0	+ 108	+ 835	0	**+ 835**	**+ 108**			
1/4	0	+ 1188	+ 778	0	− 475	− 468	0	+ 713	+ 310	0	**+ 713**	**+ 310**			
	$\pi/12$	+ 1124	+ 843	− 150	− 473	− 470	+ 1	+ 651	+ 373	− 149	**+ 716**	**+ 308**	+ 1,07	23° 30	− 8°
	$\pi/6$	+ 975	+ 987	− 205	− 472	− 473	+ 2	+ 503	+ 514	− 203	**+ 712**	**+ 305**	− 37	45° 55	− 15° 15
	$\pi/4$	+ 832	+ 1128	− 138	− 472	− 474	+ 1	+ 360	+ 654	− 137	**+ 708**	**+ 306**	− 0,931	68° 30	− 23° 05
	$\pi/3$	+ 776	+ 1176	0	− 474	− 472	0	+ 302	+ 704	0	**+ 704**	**+ 302**			
0		+ 980	+ 980	0	− 474	− 470	0	+ 506	+ 510	0	**+ 510**	**+ 506**			

Ueberlagerung beider Zustände sind die Hauptspannungen und deren Richtungen berechnet. In Abb. 6 ist der Verlauf der Hauptspannungstrajektorien veranschaulicht, außerdem wurden die Spannungsdiagramme für σ_n und σ_s im Symmetrieschnitt aufgetragen. Die punktierte Linie entspricht den Werten, die sich nach der in meiner Dissertation angegebenen Näherungsrechnung fanden. Die Abweichungen sind so gering, daß gegen eine Anwendung dieser Näherungslösung wenigstens in ähnlichen einfachen Fällen nichts einzuwenden ist. 936

Über die Knickung eines doppelwandigen Druckstabes mit parabolisch veränderlicher Querschnittshöhe.

Von **A. LOCKSCHIN** in Dnepropetrowsk.

1. Den Stäben von veränderlichem Querschnitt begegnen wir nicht selten in der Ingenieurpraxis.

Dr.-Ing. Bleich[1]) hat in seinem Buche über die eisernen Brücken die Knickung eines doppelwandigen Druckstabes mit parabolisch veränderlicher Querschnittshöhe behandelt (Abb. 1). Bei der Bestimmung der kritischen Kraft benutzt er die angenäherte Ritzsche Methode und nimmt für die Erleichterung der Rechnung die Sinusoide anstatt der Parabel an.

Die Frage kann man auch genau mittels Integrierung der entsprechenden Differentialgleichung lösen. Wir nehmen an, daß das Trägheitsmoment sich nach solchem Gesetze ändert: $I = \frac{F h^2}{2}$, wo h der Abstand der Schwerlinien der Gurte und F der Querschnitt einer Gurtwand sind. Den Koordinatenanfang nehmen wir an in 0, die Mitte des Stabes (Abb. 1). In unserem Falle haben wir für h:

$$h_x = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

wobei h_0 der Abstand in der Mitte des Stabes bedeutet und a eine Konstante ist. Wir bezeichnen das Trägheitsmoment bei $x = 0$ durch I_0 und in den Querschnitten bei

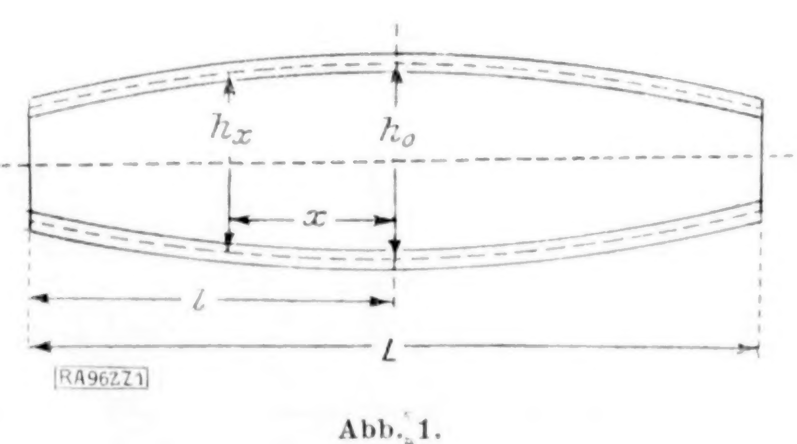
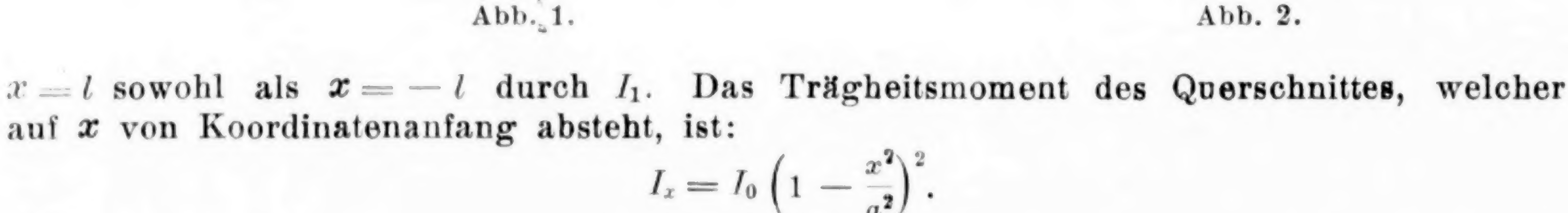


Abb. 1.

Abb. 2.



$x = l$ sowohl als $x = -l$ durch I_1. Das Trägheitsmoment des Querschnittes, welcher auf x von Koordinatenanfang absteht, ist:

$$I_x = I_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2.$$

Hieraus ist a mit der Länge des Stabes und die Trägheitsmomente in solchem Verhältnis verbunden:

$$a = \frac{l}{\sqrt{1 - m}}, \qquad \text{wo } m = \sqrt{\frac{I_1}{I_0}}.$$

Weiteres werden wir durchaus dieses a einführen. Die Druckkraft, das Biegungsmoment in dem Querschnitt x und die Ausbiegung bezeichnen wir entsprechend durch P, M_x und u. Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet (Abb. 2):

$$E I_0 \frac{(a^2 - x^2)^2}{a^4} \cdot \frac{d^2 u}{d x^2} + P u = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

[1]) Theorie und Berechnung der eisernen Brücken 1924.

Für die Verkürzung setzen wir $\frac{P a^4}{E I_0} = k^2$, dann lautet die Differentialgleichung (1):

$$(a^2 - x^2)^2 \frac{d^2 u}{d x^2} + k^2 u = 0 \quad \text{. . . . . (2).}$$

Jetzt gehen wir zur Integrierung der Differentialgleichung (2) über. Es sei $u = \sqrt{a^2 - x^2}\, v$. Für die Bestimmung v haben wir die Differentialgleichung:

$$(a^2 - x^2)^2 \frac{d^2 v}{d x^2} - 2x(a^2 - x^2)\frac{d v}{d x} + (k^2 - a^2) v = 0 \quad \text{. . . . . (3).}$$

Setzen wir $\frac{a - x}{a + x} = t$. Wenn wir es in die Differentialgleichung (3) eintragen, dann haben wir:

$$t^2 \frac{d^2 v}{d t^2} + t \frac{d v}{d t} + \frac{k^2 - a^2}{4 a^2} v = 0 \quad \text{. . . . . (4),}$$

hieraus

$$u = D_1 t^{\frac{i\sqrt{k^2 - a^2}}{2a}} + D_2 t^{-\frac{i\sqrt{k^2 - a^2}}{2a}}.$$

Nach kleinen Umwandlungen haben wir:

$$u = \sqrt{a^2 - x^2}\left\{C_1 \cos \frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{2a} \lg \frac{a + x}{a - x} + C_2 \sin \frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{2a} \lg \frac{a + x}{a - x}\right\} \quad \text{. . (5),}$$

wo D_1, D_2, C_1, C_2 willkürliche Konstanten sind. Wir nehmen an, daß die Enden des Stabes frei sich drehen können. In diesem Falle lauten die Grenzbedingungen:

$$\text{bei } x = 0 \quad \frac{d u}{d x} = 0, \qquad \text{bei } x = l \quad u = 0.$$

Von der Grenzbedingung bei $x = 0$ haben wir, daß

$$u = C_1 \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \cos \frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{2a} \lg \frac{a + x}{a - x}.$$

Wenn wir Rücksicht auf die Grenzbedingungen bei dem Ende des Stabes nehmen, dann erhalten wir die Gleichung für k^2

$$\cos \frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{2a} \lg \frac{a + l}{a - l} = 0, \qquad \text{hieraus} \quad \frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{a} \lg \frac{a + l}{a - l} = (2n + 1)\pi.$$

Wenn wir $n = 0$ annehmen, dann haben wir den kleinsten k^2. Nach Eintragung der Deutung von k^2 erhalten wir den kritischen Wert der Druckkraft:

$$P = \mu \frac{E I_0}{L^2}, \quad \text{wo} \quad \mu = \frac{4 l^2}{a^2}\left(1 + \frac{\pi^2}{\lg^2 \frac{a + l}{a - l}}\right)$$ und L die Länge des Stabes ist.

Wir führen μ für verschiedene Werte von I_1/I_0 in der Zahlentafel 1 an.

Zahlentafel 1.

$\frac{I_1}{I_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0 9	1,0
μ	7,60	8,15	8,52	8,81	9,05	9,25	9,43	9,59	9,84	9,87

In der Zahlentafel 2 sind die Werte für den Stab angeführt, welche nach der annähernden Formel von Dr.-Ing. Bleich, in der er die Sinusoide statt der Parabel nahm, berechnet wurden.

Zahlentafel 2

$\frac{I_1}{I_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
μ	7,00	7,48	8,11	8,44	8,72	8,99	9,23	9,46	9,66

Die Ritzsche Methode gibt gewöhnlich größere Werte für die kritische Kraft. In unserem Falle sind sie kleiner. Das kann man dadurch erklären, daß der Stab von Parabelform steifiger ist.

2. Die Enden des Stabes sind verspannt. Jetzt behandeln wir den Fall, wenn die Enden verspannt sind (Abb. 3). Den Koordinatenanfang nehmen wir wie früher in der Mitte des Stabes an. Die Differentialgleichung für diesen Fall lautet:

$$E\,I_0 \frac{(a^2-x^2)^2}{a^4} \cdot \frac{d^2 u}{d x^2} + P\,u = M \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6),$$

wo M das Moment des verspannten Endes ist. Nachdem wir die Differentialgleichung (6) integriert haben, erhalten wir:

$$u = \sqrt{a^2-x^2}\left\{C_1 \cos \frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2a} \lg \frac{a+x}{a-x} + C_2 \sin \frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2a} \lg \frac{a+x}{a-x}\right\} + \frac{M}{P} \quad . \quad (7).$$

Die Grenzbedingungen für diesen Fall lauten:

$$\text{bei} \quad x=0 \quad \frac{du}{dx}=0\,, \qquad \text{bei} \quad x=l \quad u=0 \quad \frac{du}{dx}=0\,.$$

Wir befriedigen die erste Grenzbedingung, wenn wir für u annehmen:

$$u = C_1 \sqrt{a^2-x^2} \cos \frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2a} \lg \frac{a+x}{a-x} + \frac{M}{P}\,.$$

Von den Grenzbedingungen bei $x=l$ erhalten wir für die Bestimmung der kritischen Kraft:

$$\sqrt{k^2-a^2}\,\mathrm{tg} \frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2a} \lg \frac{a+l}{a-l} + l = 0\,.$$

Wir bezeichnen $\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2a} \lg \frac{a+l}{a-l}$ durch η. Die Gleichung für η lautet:

$$\eta\,\mathrm{tg}\,\eta + \frac{l}{2a} \lg \frac{a+l}{a-l} = 0\,.$$

Nachdem η aus dieser Gleichung gefunden ist, haben wir für P die folgende Formel:

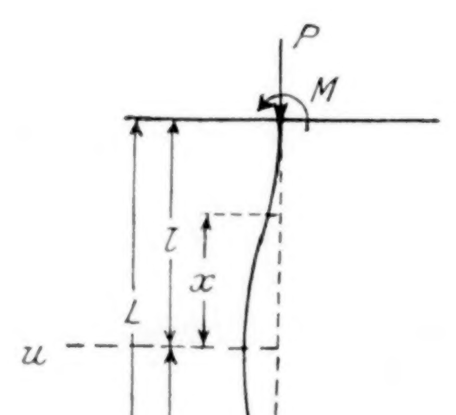


Abb. 3.

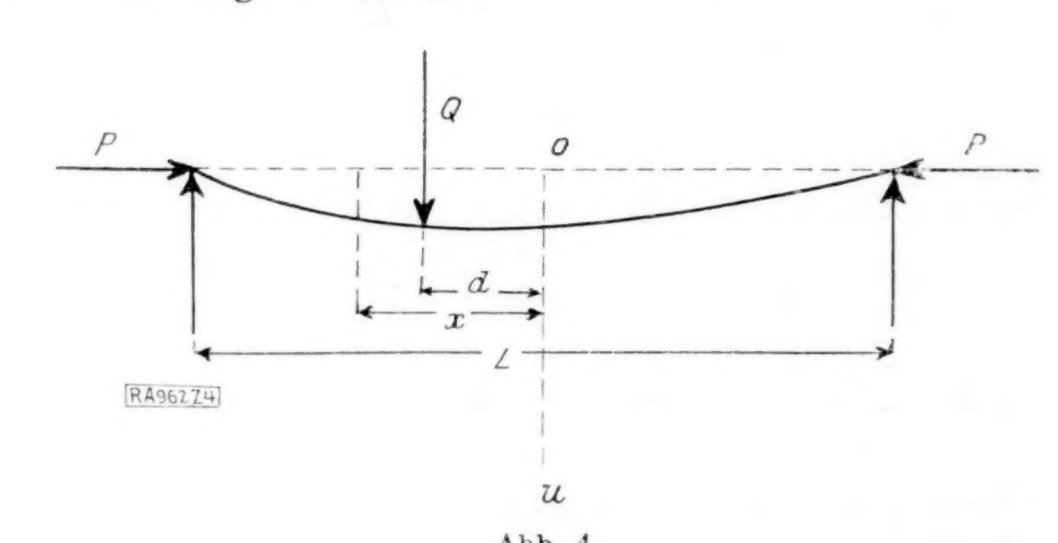


Abb. 4.

$$P = \mu \frac{E\,I_0}{L^2}\,, \quad \text{wo} \quad \mu = \frac{4\,l^2}{a^2}\left\{\frac{4\,\eta^2}{\lg^2 \frac{a+l}{a-l}} + 1\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Die Werte von μ für verschiedene Deutungen von I_1/I_0 sind in der Zahlentafel 3 angeführt.

Zahlentafel 3.

$\frac{I_1}{I_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
μ	18,27	22,50	25,62	28,24	30,54	32,62	34,50	36,26	39,48	$4\,\pi^2$

3. Die gleichzeitige Wirkung der Druckkraft und Querkraft auf die Biegung des Stabes (Abb. 4). In dem Intervall von $x=d$ bis $x=\frac{L}{2}$ haben wir die folgende Differentialgleichung der Biegung:

$$E\,I_0\,\frac{(a^2-x^2)^2}{a^4}\cdot\frac{d^2 u}{d\,x^2}+P\,u=-\frac{Q\,(L+2\,d)}{2\,L}\left(\frac{L}{2}-x\right)\quad\ldots\ldots\quad(9).$$

Für das Intervall von $x=d$ bis $x=-\frac{L}{2}$ die Differentialgleichung des Stabes lautet:

$$E\,I_0\,\frac{(a^2-x^2)^2}{a^4}\cdot\frac{d^2 u}{d\,x^2}+P\,u=-\frac{Q\,(L-2\,d)}{2\,L}\left(\frac{L}{2}+x\right)\quad\ldots\ldots\quad(10).$$

Nachdem wir diese Gleichungen integriert haben, erhalten wir für das erste Intervall

$$u=\sqrt{a^2-x^2}\left\{C_1\cos\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2\,a}\lg\frac{a-x}{a+x}+C_2\sin\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2\,a}\lg\frac{a-x}{a+x}\right\}-\frac{Q\,(L+2\,d)}{2\,P\,L}\left(\frac{L}{2}-x\right)\quad(11),$$

für das zweite Intervall:

$$u=\sqrt{a^2-x^2}\left\{D_1\cos\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2\,a}\lg\frac{a-x}{a+x}+D_2\sin\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2\,a}\lg\frac{a-x}{a+x}\right\}-\frac{Q\,(L-2\,d)}{2\,P\,L}\left(\frac{L}{2}+x\right)\quad(12).$$

Dabei muß man solche Bedingungen befriedigen: die Ordinaten der elastischen Linien bei $x=l$ und $x=-l$ sind 0 gleich, bei $x=d$ sind die Ordinaten der beiden Linien gleich und die Kurven haben eine gemeinsame Tangente. Das gibt:

$$(u)_{x=\frac{L}{2}}=0\,,\quad(u)_{x=-\frac{L}{2}}=0\,,\quad(u)_{d+0}=(u)_{d-0}\,,\quad\left(\frac{d\,u}{d\,x}\right)_{d+0}=\left(\frac{d\,u}{d\,x}\right)_{d-0}\quad(13).$$

Wir befriedigen die Grenzbedingungen, wenn wir für das erste Intervall

$$u=\frac{Q}{P}\left\{\sqrt{\frac{(a^2-d^2)\,(a^2-x^2)}{k^2-a^2}}\cdot\frac{\sin\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2\,a}\lg\frac{(a-d)\,(2\,a-L)}{(a+d)\,(2\,a+L)}}{\sin\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{a}\lg\frac{2\,a-L}{2\,a+L}}\sin\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2\,a}\lg\frac{(a-x)\,(2\,a+L)}{(a+x)\,(2\,a-L)}-\frac{(L+2\,d)\,(L+2\,x)}{4\,L}\right\}\quad\ldots\quad(14)$$

und für das zweite

$$u=\frac{Q}{P}\left\{\sqrt{\frac{(a^2-d^2)\,(a^2-x^2)}{k^2-a^2}}\cdot\frac{\sin\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2\,a}\lg\frac{(a-d)\,(2\,a+L)}{(a+d)\,(2\,a-L)}}{\sin\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{a}\lg\frac{2\,a-L}{2\,a+L}}\sin\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2\,a}\lg\frac{(a-x)\,(2\,a-L)}{(a+x)\,(2\,a+L)}-\frac{(L-2\,d)\,(L+2\,x)}{4\,L}\right\}\quad\ldots\quad(14\,b)$$

nehmen. Die Ordinate der elastischen Linie bei $x=d$ ist gleich:

$$(u)_{x=d}=\frac{Q}{P}\left\{\frac{a^2-d^2}{\sqrt{k^2-a^2}}\cdot\frac{\sin\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2\,a}\lg\frac{(a-d)\,(2\,a+L)}{(a+d)\,(2\,a-L)}\cdot\sin\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2\,a}\lg\frac{(a-d)\,(2\,a-L)}{(a+d)\,(2\,a+L)}}{\sin\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{a}\lg\frac{2\,a-L}{2\,a+L}}-\frac{L^2-4\,d^2}{4\,L}\right\}\quad\ldots\quad(15).$$

Wenn wir in diese Formeln $d=0$ setzen, erhalten wir die elastische Linie für den Fall, wo die Querkraft in der Mitte des Stabes ist. Dann haben wir die folgende Gleichung der elastischen Linie des Stabes:

$$u=\frac{Q}{2\,P}\left\{a\sqrt{\frac{a^2-x^2}{k^2-a^2}}\cdot\frac{\sin\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2\,a}\lg\frac{(a-x)\,(2\,a+L)}{(a+x)\,(2\,a-L)}}{\cos\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{2\,a}\lg\frac{2\,a-L}{2\,a+L}}-\frac{L}{2}+x\right\}\quad\ldots\quad(16).$$

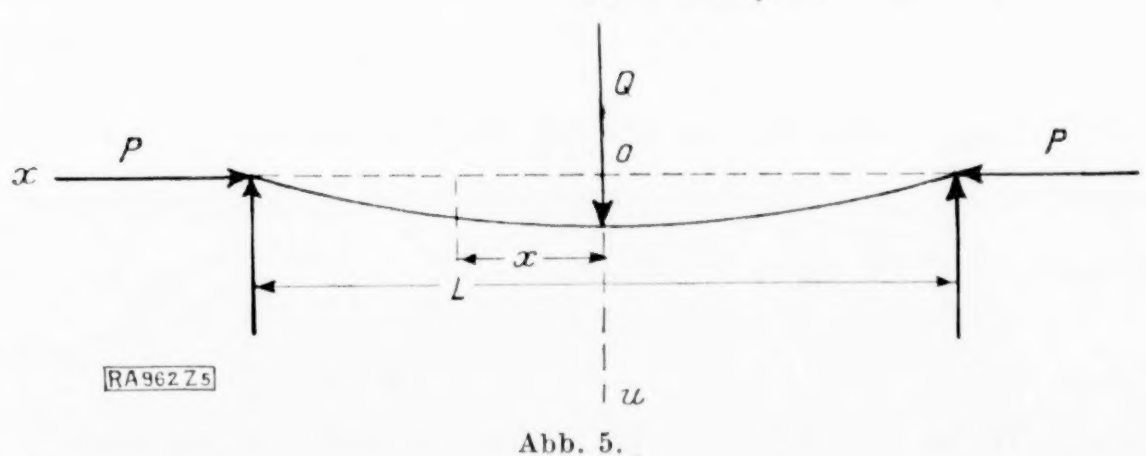


Abb. 5.

Für den letzten Fall kann die Lösung auch etwas schneller erhalten werden. Wenn die Querkraft in der Mitte des Stabes ist, dann ist die elastische Linie bezüglich derselben symmetrisch (Abb. 5).

Hier haben wir solche Grenzbedingungen:

$$\text{bei} \quad x = \frac{L}{2} \quad u = 0\,, \qquad \text{bei} \quad x = 0 \quad \frac{d\,u}{d\,x} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

Wir befriedigen die Grenzbedingung bei $x = L/2$, wenn wir

$$u = C\sqrt{a^2 - x^2}\cdot \sin\left(\frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{2\,a} \lg \frac{a - x}{a + x}\cdot\frac{2\,a + L}{2\,a - L}\right) - \frac{Q}{2\,P}\left(\frac{L}{2} - x\right) \quad . \; . \quad (18)$$

nehmen. Von der Grenzbedingung bei $x = 0$ haben wir, daß

$$C = \frac{Q}{2\,P\sqrt{k^2 - a^2}\cos\left(\frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{2\,a} \lg \frac{2\,a - L}{2\,a + L}\right)}.$$

Schließlich erhalten wir für u

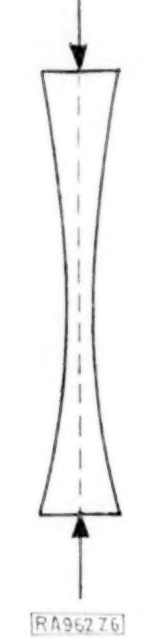


Abb. 6.

$$u = \frac{Q}{2\,P}\left\{a\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{k^2 - a^2}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{2\,a}\lg\frac{(a - x)(2\,a + L)}{(a + x)(2\,a - L)}\right)}{\cos\left(\frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{2\,a}\lg\frac{2\,a - L}{2\,a + L}\right)} - \frac{L}{2} + x\right\} \quad . \; . \; . \quad (19).$$

4. Die Scheitel der Parabel sind nach der Achse des Stabes gerichtet. Jetzt gehen wir über zum Stabe, welcher mit Parabeln, deren Scheitel nach der Achse des Stabes sich richten, begrenzt ist. (Abb. 6.)

Hier ist $I_x = I_0\left(1 + \frac{x^2}{b^2}\right)^2$. Wir nehmen an $\frac{I_1}{I_0} = m^2$. Anstatt a aus dem ersten Fall führen wir $b = \frac{l}{\sqrt{m - 1}}$ ein. Ebenso wie früher bezeichnen wir $\frac{P\,b^4}{E\,I_0}$ durch k^2. Die Differentialgleichung für diesen Fall lautet:

$$(b^2 + x^2)^2\frac{d^2\,u}{d\,x^2} + k^2\,u = 0 \quad \ldots \ldots \quad (20).$$

Wenn wir die Differentialgleichung (20) mit der Differentialgleichung (2) vergleichen, dann sehen wir, daß in der ersten b^2 steht, anstatt $-a^2$. Darüber kann man den allgemeinen Integral der Differentialgleichung (20) erhalten ohne Schwierigkeiten; man muß nur $b\,i$ anstatt a in die Formeln einführen.

Das allgemeine Integral von (20) lautet:

$$u = \sqrt{b^2 + x^2}\left\{D_1\left(\frac{x - b\,i}{x + b\,i}\right)^{\frac{\sqrt{b^2 + k^2}}{2\,b}} + D_2\left(\frac{x - b\,i}{x + b\,i}\right)^{-\frac{\sqrt{b^2 + k^2}}{2\,b}}\right\} \quad . \; . \; . \quad (21).$$

Nach kleinen Aenderungen haben wir:

$$u = \sqrt{b^2 + x^2}\left\{C_1\cos\left(\frac{\sqrt{b^2 + k^2}}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{b^2 + k^2}}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right)\right\} \quad . \; . \quad (22),$$

wo C_1 und C_2 willkürliche Konstanten sind.

5. Die Enden des Stabes können sich frei drehen (Abb. 2). In diesem Falle haben wir solche Grenzbedingungen:

$$\text{bei} \quad x = 0\,, \quad \frac{d\,u}{d\,x} = 0\,, \qquad \text{bei} \quad x = l\,, \quad u = 0\,.$$

Von diesen Bedingungen erhalten wir für die Bestimmung der kritischen Kraft:

$$\frac{\sqrt{b^2 + k^2}}{b}\operatorname{arctg}\frac{l}{b} = \frac{(2\,n + 1)\,\pi}{2}\,.$$

Die kleinste kritische P ist gleich:

$$P = \mu\frac{E\,I_1}{L^2}\,, \qquad \text{wo} \quad \mu = \frac{4\,I_0\,l^2}{I_1\,b^2}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\operatorname{arctg}\frac{l}{b}}\right)^2 - 1\right\}.$$

Die μ für einige Werte von I_0/I_1 sind ja in der Zahlentafel 4 gegeben.

Zahlentafel 4.

$\frac{I_0}{I_1}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
μ	1,39	2,48	3,50	4,48	5,42	6,34	7,25	8,13	9,01

6. Ein Ende ist frei, das zweite verspannt (Abb. 7). Den Koordinatenanfang nehmen wir im freien Ende. Dann ändert sich das Trägheitsmoment nach solchem Gesetze.

$$I_x = I_0 \frac{(b^2 + x^2)^2}{b^4}.$$

Für diesen Fall haben wir die folgenden Grenzbedingungen:

$$\text{bei } x = 0, \quad u = 0, \quad \text{bei } x = l, \quad \frac{du}{dx} = 0 \quad (24).$$

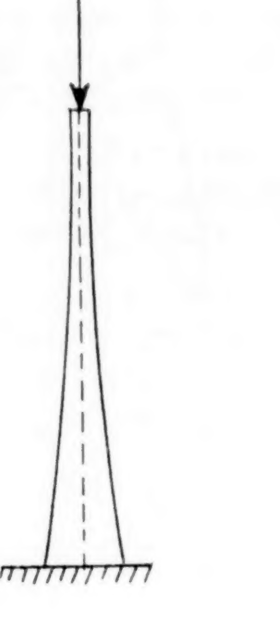
Wir befriedigen die erste Grenzbedingung, wenn wir annehmen:

$$u = c\sqrt{b^2 + x^2} \sin \frac{\sqrt{b^2 + k^2}}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \quad (25)$$

Von der zweiten erhalten wir für k^2 diese Gleichung:

$$\sqrt{b^2 + k^2} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{b^2 + k^2}}{b} \operatorname{arctg} \frac{l}{b} + l = 0 \quad (26).$$

Ebenso wie früher bezeichnen wir $\frac{\sqrt{b^2 + k^2}}{b} \operatorname{arctg} \frac{l}{b}$ durch η.



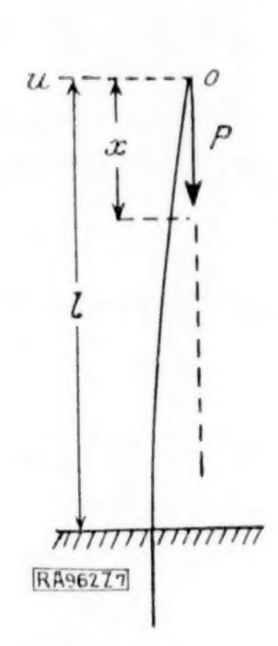


Abb 7.

Für die Bestimmung der Werte von η haben wir:

$$\eta \operatorname{ctg} \eta + \frac{l}{b} \operatorname{arctg} \frac{l}{b} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (27).$$

Nachdem wir η bestimmt haben, erhalten wir die kritische Kraft

$$P = \mu \frac{E I_1}{l^2}, \quad \text{wo} \quad \mu = \frac{I_0 l^2}{I_1 b^2} \left\{ \frac{\eta^2}{(\operatorname{arctg} l/b)^2} - 1 \right\} \quad \ldots \quad (28).$$

Die μ für verschiedene Werte von I_0/I_1 sind in der Zahlentafel 5 gegeben.

Zahlentafel 5.

$\frac{I_0}{I_1}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
μ	0,86	1,17	1,41	1,61	1,79	1,95	2,09	2,22	2,35	2,47

Wenn wir zwei Stäbe von der Form vereinigen (Abb. 7), erhalten wir einen Stab, dessen Querschnittshöhe von der Mitte nach den Enden abnimmt (Abb. 8).

7. Ein Ende des Stabes ist verspannt, das zweite kann sich verschieben, aber kann sich nicht drehen (Abb. 9). Den Koordinatenanfang nehmen wir in dem Ende, welches sich verschieben kann. Für diesen Fall haben wir die folgende Differentialgleichung:

$$E I_0 \frac{(b^2 + x^2)^2}{b^4} \cdot \frac{d^2 u}{d x^2} + P u = M,$$

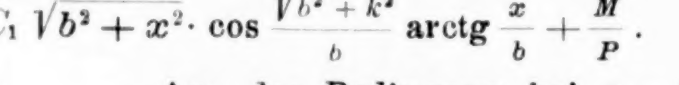
wo M das Moment bei $x = 0$ ist. Das allgemeine Integral von dieser Gleichung lautet

$$u = \sqrt{b^2 + x^2} \left\{ C_1 \cos \frac{\sqrt{b^2 + k^2}}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b} + C_2 \sin \frac{\sqrt{b^2 + k^2}}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right\} + \frac{M}{P}, \quad \text{wo } k^2 = \frac{P b^4}{E I_0}.$$

Wir haben die folgenden Grenzbedingungen:

$$\text{bei} \quad x = 0, \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad u = 0, \quad \text{bei} \quad x = l, \quad \frac{du}{dx} = 0.$$

Wir befriedigen die erste von diesen Grenzbedingungen, wenn wir für u annehmen:



$$u = C_1 \sqrt{b^2 + x^2} \cdot \cos \frac{\sqrt{b^2+k^2}}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b} + \frac{M}{P}.$$

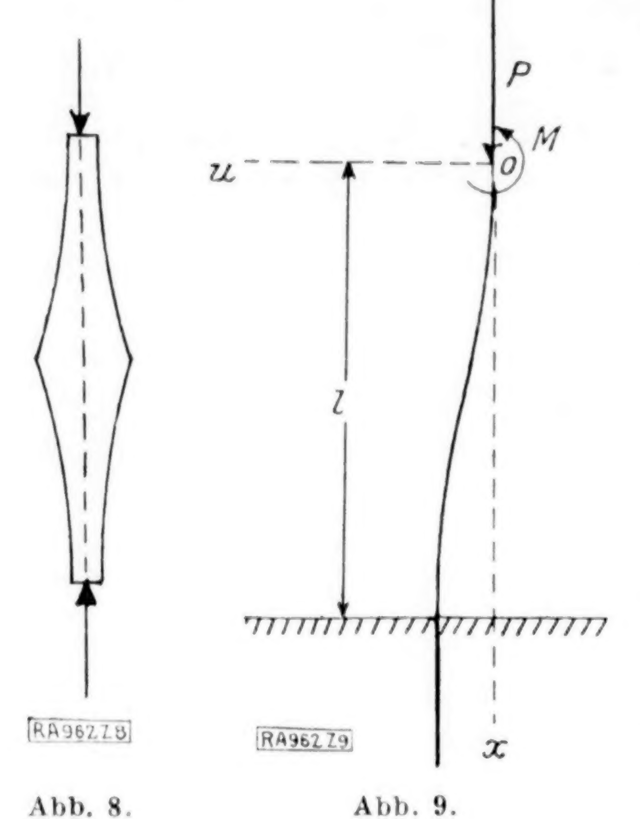


Abb. 8. Abb. 9.

Aus der Bedingung bei $x = l$ erhalten wir für die Bestimmung der Werte von η:

$$\eta \, tg \, \eta = \frac{l}{b} \operatorname{arctg} \frac{l}{b}, \text{ wo } \eta \text{ mit } k^2,$$

wie in dem vorgehenden Falle verbunden ist.

Nachdem wir aus dieser Gleichung η bestimmt haben, erhalten wir für die kritische Kraft: $P = \mu \frac{E I_1}{l^2}$. Die Beziehung zwischen μ und η ist schon früher gegeben (28).

Die μ für einige Werte von I_0/I_1 sind in der Zahlentafel 6 gegeben. 962

Zahlentafel 6.

I_0/I_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
μ	2,62	3,84	4,83	5,70	6,50	7,24	7,94	8,59	9,24

Das Glätten empirisch gefundener Zahlenreihen.

Von **FR. A. WILLERS** in Freiberg (Sa.).

1. Hat man eine Reihe von Werten y_m, die aus Beobachtungen gewonnen sind, oder sind die y_m statistische Daten, so findet man im allgemeinen, daß infolge der den Werten anhaftenden Ungenauigkeiten die Aufstellung eines für Interpolation, Differentiation, Integration usw. brauchbaren Differenzenschemas nicht möglich ist, weil die Differenzen einen ganz unregelmäßigen Verlauf zeigen. Man pflegt daher vor Aufstellung des Differenzenschemas eine solche Zahlenreihe zu glätten, das heißt, man sucht neue Werte η_m, die sich so wenig wie möglich von den gegebenen Werten y_m unterscheiden, die aber regelmäßigeren Verlauf der Differenzen aufweisen. Bei Daten von sehr geringer Genauigkeit kann man dieses Glätten graphisch vornehmen; doch ist das ein ziemlich willkürlicher Vorgang. Man hat daher verschiedene numerische Verfahren, insbesondere unter der Annahme äquidistanter Daten, angegeben. Am bekanntesten ist das folgende: Man stellt die Gleichung der durch fünf benachbarte Punkte bestimmten, nach der Methode der kleinsten Quadrate besten Parabel zweiter Ordnung

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

auf. Wählt man als Nullpunkt die Abszisse des mittleren Punktes, so erhält man in diesem Falle als verbesserten Wert der mittleren Ordinate

$$\eta_0 = a_0 = y_0 - \frac{3}{35} \Delta_0^4 .$$

Man erhält also eine verbesserte Beobachtungsreihe, wenn man nach Aufstellung des Differenzenschemas der ursprünglichen Werte von jedem dieser Werte 3/35 der in seiner Reihe stehenden vierten Differenz abzieht[1]). Dabei bleiben an beiden Enden die beiden äußersten Werte — die Anfangswerte seien mit y_{-2} y_{-1} bezeichnet — unverbessert. Wählt man nun für die fünf ersten Werte y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_{+1}, y_{+2} eine Parabel dritter Ordnung statt der zweiter Ordnung, so bleibt die Verbesserung des mittleren Wertes y_0 unverändert, während an y_{-1} bzw. y_{-2} als Verbesserungen $+\frac{2}{35} \Delta_0^4$ bzw. $-\frac{1}{70} \Delta_0^4$ anzubringen sind, falls man die gleiche Parabel zur Verbesserung dieser Werte benutzt, um den Aus-

[1]) Willers, Methoden der praktischen Analysis, Berlin 1928, S. 253.

fall der Randwerte in der Reihe der korrigierten Werte zu vermeiden. Entsprechendes gilt für die beiden letzten Werte der Zahlenreihe. Diese Verbesserungen sind also auch durch den in der Reihe der mittleren Ordinate stehenden Wert der vierten Differenz bestimmt.

Es fragt sich nun, ob man bei Annahme äquidistanter Ordinaten zu ähnlich einfachen Resultaten kommt, wenn man Parabeln höherer Ordnung benutzt. In der Tat ist das der Fall. Bestimmt man zu $2n+1$ benachbarten Werten die nach der Methode der kleinsten Quadrate beste Parabel $(2m+1)$-ster Ordnung, so läßt sich zeigen, daß diese Verbesserungen nur von den Differenzen $\Delta_{2m+2}, \Delta_{2m+4} \ldots \Delta_{2n}$ des üblichen Differenzenschemas abhängen, die in der Zeile der mittleren Ordinate stehen, und von den Differenzen $\bar{\Delta}_{2m+4}, \bar{\Delta}_{2m+6}, \ldots \bar{\Delta}_{2n}$ ebenfalls der mittleren Zeile eines zweiten Schemas, das man aus den ersten Momenten der gegebenen Daten zu bilden hat. Auf die Verbesserung der Mittelordinate haben diese letzten Differenzen keinen Einfluß.

2. Es handelt sich weiterhin also um folgendes Problem: Gegeben seien die $2n+1$ äquidistanten, bei passend gewählten Maßeinheiten zu den Argumentwerten $-n$, $-(n-1), \ldots -1, 0, +1, \ldots +(n-1), +n$ gehörenden Daten

$$y_{-n},\ y_{-(n-1)}, \ldots y_{-1},\ y_0,\ y_1, \ldots y_{n-1},\ y_n .$$

Diese Wertreihe soll im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate durch eine Parabel $(2m+1)$-ter Ordnung $(m < n)$

$$\eta = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_{2m+1} x^{2m+1} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

möglichst gut dargestellt werden. Die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_{2m+1}$ müssen also so bestimmt werden, daß

$$\sum_{r=-n}^{r=+n} (y_r - \eta_r)^2 = \sum_{r=-n}^{r=+n} [y_r - (a_0 + a_1 x_r^1 + a_2 x_r^2 \ldots + a_{2m+1} x_r^{2m+1})]^2 \quad . \quad (2)$$

ein Minimum wird. Setzt man die $2m+2$ ersten Ableitungen nach den zu bestimmenden Koeffizienten gleich Null, so gibt das, wenn man durch 2 dividiert, wenn man ferner gleich in zwei Gruppen zu je $m+1$ Gleichungen ordnet und wenn man folgende Abkürzungen einführt:

$$n^l + (n-1)^l \ldots + (+1)^l + (-1)^l + (-2)^l + \ldots (-n+1)^l + (-n)^l = 2\,\Sigma_l ,$$

wobei zu beachten ist, daß Σ_l für ungerade Werte von l Null ist, ferner

$$y_l + y_{-l} = S_l , \qquad y_l - y_{-l} = D_l ,$$

wo $S_0 = y_0$, $D_0 = 0$ ist, folgende erste Gruppe von Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}
(\tfrac{1}{2} + \Sigma_0)\, a_0 + \Sigma_2 a_2 \ldots + \Sigma_{2m}\, a_{2m} = \tfrac{1}{2}(y_0 + S_1 + S_2 \ldots + S_n) = \tfrac{1}{2} \cdot M_0 \\
\Sigma_2\, a_0 + \Sigma_4 a_2 \ldots + \Sigma_{2m+2}\, a_{2m} = \tfrac{1}{2}(S_1 + 2^2 S_2 \ldots + n^2 S_n) = \tfrac{1}{2} \cdot M_2 \\
\Sigma_4\, a_0 + \Sigma_6 a_2 \ldots + \Sigma_{2m+4}\, a_{2m} = \tfrac{1}{2}(S_1 + 2^4 S_2 \ldots + n^4 S_n) = \tfrac{1}{2} \cdot M_4 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Sigma_{2m}\, a_0 + \Sigma_{2m+2} a_2 \ldots + \Sigma_{4m}\, a_{2m} = \tfrac{1}{2}(S_1 + 2^{2m} S_2 \ldots + n^{2m} S_n) = \tfrac{1}{2} \cdot M_{2m}
\end{array}\right\} (3).$$

Die auf der rechten Seite stehenden Größen sind die Momente entsprechender Ordnung. In dieser ersten Gruppe von Gleichungen treten also nur die Momente gerader Ordnung auf, während in der zweiten Gruppe nur die ungerader Ordnung stehen.

$$\left.\begin{array}{l}
\Sigma_2\, a_1 + \Sigma_4\, a_3 \ldots + \Sigma_{2m+2}\, a_{2m+1} = \tfrac{1}{2}(D_1 + 2\, D_2 + 3\, D_3 \ldots + n\, D_n) = \tfrac{1}{2} \cdot M_1 \\
\Sigma_4\, a_1 + \Sigma_6\, a_3 \ldots + \Sigma_{2m+4}\, a_{2m+1} = \tfrac{1}{2}(D_1 + 2^3 D_2 + 3^3 D_3 \ldots + n^3 D_n) = \tfrac{1}{2} \cdot M_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Sigma_{2m+2}\, a_1 + \Sigma_{2m+4}\, a_3 \ldots + \Sigma_{4m+2}\, a_{2m+1} = \tfrac{1}{2}(D_1 + 2^{2m+1} D_2 + 3^{2m+1} D_3 \ldots + n^{2m+1} D_n) = \tfrac{1}{2} \cdot M_{2m+1}
\end{array}\right\} (4).$$

Aus der ersten Gruppe lassen sich die Koeffizienten mit geradem, aus der zweiten die mit ungeradem Index berechnen.

3. Nimmt man zuerst die erste Gruppe (3), so müssen die darin vorkommenden geraden Koeffizienten zu η_l den Beitrag

$$a_0 + a_2 l^2 + a_4 l^4 \ldots + a_{2m} l^{2m} = \eta_l^g \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

liefern. Faßt man die $m+1$-Gleichungen (3) mit den Parametern $1, \lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_m$ zusammen, so kann man diese so wählen, daß die Faktoren der einzelnen Koeffizienten

proportional denen der Gl. (5) sind. Das gibt, wenn man zunächst nur die linken Seiten der Gl. (3) beachtet und zur Abkürzung

$$[p] = 1 + p^2 \lambda_1 + p^4 \lambda_2 + \ldots + p^{2m} \lambda_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

setzt, die $m+1$-Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} [n] + [n-1] + \ldots + [1] = \mu - {}^1/_2 \\ n^2\,[n] + (n-1)^2\,[n-1] + \ldots + 1^2\,[1] = \mu\, l^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n^{2m}\,[n] + (n-1)^{2m}\,[n-1] + \ldots + 1^{2m}\,[1] = \mu\, l^{2m} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

wo μ ein von l unabhängiger Proportionalitätsfaktor ist. Darin kommen n unbekannte Größen $[p]$ vor, für die wir den Ansatz machen

$$[p] = (-1)^p \left[\alpha_1 \binom{2m+2}{m+1-p} + \alpha_2 \binom{2m+4}{m+2-p} \ldots + \alpha_{n-m} \binom{2n}{n-p}\right] \quad . \quad . \quad (8)$$

für alle $p \gtrless l$, während wir für den Fall, daß $p = l > 0$ ist, setzen:

$$[l] = \mu + (-1)^l \left[\alpha_1 \binom{2m+2}{m+1-l} + \alpha_2 \binom{2m+4}{m+2-l} + \ldots + \alpha_{n-m} \binom{2n}{n-l}\right] \quad . \quad (9),$$

wo die Klammergrößen die Binomialkoeffizienten sind. Für diese soll Null gesetzt werden, wenn die unteren Zahlen in den Klammern negativ werden. Setzt man das in die erste der Gl. (7) ein, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \mu - {}^1/_2 = \qquad\qquad + (-1)^n\, \alpha_{n-m} \binom{2n}{0} \\ \qquad + (-1)^{n-1}\, \alpha_{n-m-1} \binom{2n-2}{0} + (-1)^{n-1}\, \alpha_{n-m} \binom{2n}{1} \\ + (-1)^{n-2}\, \alpha_{n-m-2} \binom{2n-4}{0} + (-1)^{n-2}\, \alpha_{n-m-1} \binom{2n-2}{1} + (-1)^{n-2}\, \alpha_{n-m} \binom{2n}{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu \quad + (-1)^l\, \alpha_1 \binom{2m+2}{m+1-l} \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^l\, \alpha_{n-m} \binom{2n}{n-l} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - \alpha_1 \binom{2m+2}{m} - \alpha_2 \binom{2m+4}{m+1} \ldots - \alpha_{n-m-2} \binom{2n-4}{n-3} - \alpha_{n-m-1} \binom{2n-2}{n-2} - \alpha_{n-m} \binom{2n}{n-1} \\ \pm \frac{\alpha_1}{2} \binom{2m+2}{m+1} \pm \frac{\alpha_2}{2} \binom{2m+4}{m+2} \ldots \pm \frac{\alpha_{n-m-2}}{2} \binom{2n-4}{n-2} \pm \frac{\alpha_{n-m-1}}{2} \binom{2n-2}{n-1} \pm \frac{\alpha_{n-m}}{2} \binom{2n}{n} \end{array}\right\} (10),$$

wo die letzte Reihe mit $\pm$ hinzugefügt ist. Beachtet man nun, daß

$$\binom{2r}{0} - \binom{2r}{1} + \binom{2r}{2} \ldots + (-1)^{r-1} \binom{2r}{r-1} + (-1)^r \frac{1}{2} \binom{2r}{r} = 0 \quad . \quad . \quad (11)$$

ist, so findet man, daß (10) und damit die erste Gl. (7) erfüllt ist, wenn

$$\alpha_1 \binom{2m+2}{m+1} + \alpha_2 \binom{2m+4}{m+2} + \ldots + \alpha_{n-m} \binom{2n}{n} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

ist. Setzt man in die anderen Gleichungen (7) ein, so sind diese ohne weiteres erfüllt, da ja

$$\binom{2r}{r-1} 1^{2s} - \binom{2r}{r-2} 2^{2s} + \binom{2r}{r-3} 3^{2s} \ldots + (-1)^{r-1} \binom{2r}{0} r^{2s} = 0 \quad . \quad . \quad (13)$$

für alle ganzzahligen s von 1 bis $r-1$ ist. Zur Bestimmung der $n+1$ unbekannten Größen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, μ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-m}$ hat man damit die $n+1$-Gleichungen (8), (9) und (12).

Wir untersuchen nun weiter, was bei der Zusammenfassung der Gl. (3) auf der rechten Seite entsteht. Unter Benutzung der Gl. (6) und (7) erhält man

$$\mu\,(a_0 + a_2\, l^2 + \ldots + a_{2m}\, l^{2m}) = {}^1/_2\,(y_0 + [1]\, S_1 + [2]\, S_2 \ldots + [n]\, S_n) \quad . \quad (14).$$

Die rechte Seite wird, wenn man den Ansatz (8) und (9) beachtet und statt des Faktors 1 von y_0 den Wert (12) einsetzt:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{a_1}{2}\binom{2m+2}{m+1}y_0+\frac{a_2}{2}\binom{2m+4}{m+2}y_0\ldots+\frac{a_{n-m-1}}{2}\binom{2n-2}{n-1}y_0+\frac{a_{n-m}}{2}\binom{2n}{n}y_0\\ -\frac{a_1}{2}\binom{2m+2}{m}S_1-\frac{a_2}{2}\binom{2m+4}{m+1}S_1\ldots-\frac{a_{n-m-1}}{2}\binom{2n-2}{n-2}S_1-\frac{a_{n-m}}{2}\binom{2n}{n-1}S_1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\mu}{2}S_l+(-1)^l\frac{a_1}{2}\binom{2m+2}{m+1-l}S_l+(-1)^l\frac{a_2}{2}\binom{2m+4}{m+2-l}S_l\ldots+(-1)^l\frac{a_{n-m-1}}{2}\binom{2n-2}{n-1-l}S_l+(-1)^l\frac{a_{n-m}}{2}\binom{2n}{n-l}S_l\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +(-1)^{n-1}\frac{a_{n-m-1}}{2}\binom{2n-2}{0}S_{n-1}+(-1)^{n-1}\frac{a_{n-m}}{2}\binom{2n}{1}S_{n-1}\\ +(-1)^n\frac{a_{n-m}}{2}\binom{2n}{0}S_n\\ =\tfrac{1}{2}\mu S_l+(-1)^{m+1}\left(\frac{a_1}{2}\Delta_0^{2m+2}-\frac{a_2}{2}\Delta_0^{2m+4}+\frac{a_3}{2}\Delta_0^{2m+6}\ldots\ldots+(-1)^{n-m-1}\frac{a_{n-m}}{2}\Delta_0^{2n}\right)\end{array}\right\} \quad (15),$$

wobei man betreffs des Vorzeichens beachten muß, daß das mittlere Glied von Δ^{4r+2} negativ, das von Δ^{4r} positiv ist. Der Beitrag, den die geraden Glieder zum verbesserten Wert liefern, ist somit

$$\eta_l^{g}=a_0+a_2l^2\ldots+a_{2m}l^{2m}=\tfrac{1}{2}S_l+(-1)^{m+1}\frac{1}{2\mu}\left(a_1\Delta_0^{2m+2}-a_2\Delta_0^{2m+4}\ldots(-1)^{n-m-1}a_{n-m}\Delta_0^{2n}\right) \quad (16).$$

Dieser Teil ist also nur abhängig von den Differenzen, die in dem ursprünglichen Schema in der Zeile des Mittelwertes y_0 stehen, und da für den Fall $l=0$, d. h. also für die Berechnung von η_0, die ungeraden Glieder nicht in Betracht kommen, so läßt sich die Korrektur der mittleren Ordinate immer durch die in ihrer Zeile stehenden Differenzen dieses Schemas ausdrücken.

4. Aehnlich ist jetzt die zweite Gruppe (4) der Gleichungen zu behandeln, aus denen sich der Beitrag η_l^u der Koeffizienten mit ungeradem Index zum Werte η_l bestimmt. Man faßt genau wie oben mit Parametern $1, \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_m$ zusammen, führt wieder die Abkürzung

$$1+l^2\varkappa_1+l^4\varkappa_2+\ldots+l^{2m}\varkappa_m=[l] \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

ein und setzt die Faktoren gleicher Koeffizienten hier und in

$$\eta_l^u=a_1\,l+a_3\,l^3+\ldots+a_{2m+1}\,l^{2m+1} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

einander proportional. Das gibt, wenn ν der Proportionalitätsfaktor ist, die $m+1$ Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}n^2\;[n]+(n-1)^2\;[n-1]\ldots+1^2\;[1]=\nu\,l\\ n^4\;[n]+(n-1)^4\;[n-1]\ldots+1^4\;[1]=\nu\,l^3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ n^{2m+2}[n]+(n-1)^{2m+2}[n-1]\ldots+1^{2m+2}[1]=\nu\,l^{2m+1}\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (19)$$

für die n Größen $[l]$. Aehnlich wie oben wird jetzt für alle $p \gtrless l$ der Ansatz gemacht

$$[p]=\quad(-1)^p\left[\beta_1\binom{2m+2}{m+1-p}+\beta_2\binom{2m+4}{m+2-p}+\ldots+\beta_{n-m}\binom{2n}{n-p}\right] \quad . \quad (20)$$

und für $p=l$

$$[l]=\frac{\nu}{l}+(-1)^l\left[\beta_1\binom{2m+2}{m+1-l}+\beta_2\binom{2m+4}{m+2-l}+\ldots+\beta_{n-m}\binom{2n}{n-l}\right] \quad . \quad (21).$$

Setzt man das ein und beachtet wieder die Gl. (13), so findet man, daß die Gl. (19) erfüllt sind, falls β_1, das in der letzten Gleichung den Faktor

$$-\binom{2m+2}{m}1^{2m+2}+\binom{2m+2}{m-1}2^{2m+2}-\binom{2m+2}{m-2}3^{2m+2}\ldots+(-1)^{m+1}\binom{2m+2}{0}(m+1)^{2m+2}$$

hat, der ja nicht Null ist, gleich Null gesetzt wird. Faßt man jetzt die rechten Seiten der Gl. (4) auch mit den Parametern $1, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_m$ zusammen, so erhält man

$$\nu\,(a_1\,l+a_3\,l^3+\ldots a_{2m+1}\,l^{2m+1})=\tfrac{1}{2}\,\{D_1\,[1]+2\,D_2\,[2]+3\,D_3\,[3]\ldots+n\,D_n\,[n]\} \quad (22).$$

Schreibt man unter Benutzung von (20) und (21) diese Gleichung ausführlicher hin, so wird die rechte Seite

$$\left.\begin{aligned}
&- \frac{\beta_2}{2}\binom{2m+4}{m+1} D_1 - \frac{\beta_3}{2}\binom{2m+6}{m+2} D_1 - \ldots - \frac{\beta_{n-m-1}}{2}\binom{2n-2}{n-2} D_1 - \frac{\beta_{n-m}}{2}\binom{2n}{n-1} D_1 \\
&+ \frac{\beta_2}{2}\binom{2m+4}{m} 2D_2 + \frac{\beta_3}{2}\binom{2m+6}{m+1} 2D_2 + \ldots + \frac{\beta_{n-m-1}}{2}\binom{2n-2}{n-3} 2D_2 + \frac{\beta_{n-m}}{2}\binom{2n}{n-2} 2D_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+\frac{\nu}{2}D_l + (-1)^l\frac{\beta_2}{2}\binom{2m+4}{m+2-l} l D_l + (-1)^l \frac{\beta_3}{2}\binom{2m+6}{m+3-l} l D_l + \ldots + (-1)^l\frac{\beta_{n-m-1}}{2}\binom{2n-2}{n-1-l} l D_l + (-1)^l \frac{\beta_{n-m}}{2}\binom{2n}{n-l} l D_l \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+(-1)^{n-1}\frac{\beta_{n-m-1}}{2}\binom{2n-2}{0}(n-1)D_{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{\beta_{n-m}}{2}\binom{2n}{1}(n-1)D_{n-1} \\
&+(-1)^n \frac{\beta_{n-m}}{2}\binom{2n}{0} n D_n
\end{aligned}\right\} \quad (23).$$

Stellt man nun ein Differenzenschema auf für die mit den zugehörigen Abszissenwerten multiplizierten Ordinaten, also für die ersten Momente der Daten

$$- n\, y_{-n};\ -(n-1)\, y_{-(n-1)};\ \ldots - y_{-1};\ 0;\ y_1;\ 2\, y_2;\ \ldots (n-1)\, y_{n-1};\ n\, y_n$$

und bezeichnet diese Differenzen zum Unterschied von denen des ursprünglichen Schemas mit einem darüber gesetzten Strich, so wird

$$\eta_l^u = a_1 l + a_3 l^3 \ldots + a_{2m+1} l^{2m+1} = {}^1\!/_2 D_l + \frac{(-1)^m}{2\nu}\left[\beta_2 \overline{\Delta_0^{2m+4}} - \beta_3 \overline{\Delta_6^{2m+6}} + \ldots + (-1)^{n-m}\beta_{n-m}\overline{\Delta_0^{2n}}\right] \quad (24).$$

Auch die Beträge, die durch die Koeffizienten mit ungeradem Index zu η_l hinzukommen, sind also sämtlich durch Differenzen bestimmt, die in der mittleren Zeile dieses zweiten Differenzenschemas stehen. Die Koeffizienten β sind darin, ebenso wie oben die α, natürlich noch Funktionen von n, m und l, und der Parameter ν eine Funktion von n und m. Diese Größen lassen sich mittels der Gl. (20) und (21) berechnen. Würde man in der Näherungsparabel noch ein Glied $a_{2m+3}\, x^{2m+3}$ hinzunehmen, so würde auch $\beta_2 = 0$ werden usw. Man hat damit also folgenden Satz bewiesen:

Die an den gegebenen $2n+1$ äquidistanten Werten anzubringenden Verbesserungen, die bestimmt sind durch die nach der Methode der kleinsten Quadrate beste Näherungsparabel $(2m+1)$-ter Ordnung, hängen allein von den $n-m$ Differenzen $\Delta_0^{2m+2}, \Delta_0^{2m+4}, \ldots \Delta_0^{2n}$ der mittleren Zeile des Differenzenschemas der gegebenen Daten und von den $n-m-1$ Differenzen $\overline{\Delta_0^{2m+4}}, \overline{\Delta_0^{2m+6}}, \ldots \overline{\Delta_0^{2n}}$ der mittleren Zeile des Differenzenschemas der ersten Momente der gegebenen Größen ab.

5. Damit wenden wir uns der Berechnung der Faktoren $\alpha_r/2\mu$ und $\beta_q/2\nu$ der Differenzen zu, die wir als Quotienten zweier Determinanten erhalten, und zwar sollen nur die drei Fälle $n = m+1, m+2$ und $m+3$ behandelt werden. Im Falle $n = m+1$, von dem oben der Fall $m = 1$ erwähnt wurde, kommen die von den Koeffizienten mit ungeradem Index herrührenden Korrektionen nicht in Betracht. Von den Gl. (24) bleibt nur

$$\eta_l^u = {}^1\!/_2\, D_l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25).$$

Auch von dem aus den Gliedern mit geradem Index herrührenden Teil bleibt nur das Glied mit α_1. Den Wert von α_1 entnimmt man aus der Gl (12)

$$\alpha_1 = 1 \Big/ \binom{2m+2}{m+1} = 1 \Big/ \binom{2n}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26).$$

Um den Proportionalitätsfaktor zu berechnen, setzen wir die Gl. (8) und (9) noch einmal ausführlich hierher

$$\left.\begin{aligned}
&0 + \lambda_1 \quad + \lambda_2 \quad \ldots + \lambda_{n-1} &&= - \alpha_1\binom{2n}{n-1} - 1 \\
&0 + 2^2\lambda_1 + 2^4\lambda_2 \ldots + 2^{2n-2}\lambda_{n-1} &&= + \alpha_1\binom{2n}{n-2} - 1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&-\mu + l^2\lambda_1 + l^4\lambda_2 \ldots + l^{2n-2}\lambda_{n-1} &&= (-1)^l \alpha_1\binom{2n}{n-l} - 1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&0 + (n)^2\lambda_1 + (n)^4\lambda^2 \ldots + (n)^{2n-2}\lambda_{n-1} &&= (-1)^n \alpha_1\binom{2n}{0} - 1
\end{aligned}\right\} \quad (27).$$

Der Nenner von $-\mu$ ist

$$(-1)^{l+1}\begin{vmatrix} 1^2 & 1^4 \ldots & 1^{2n-2} \\ 2^2 & 2^4 \ldots & 2^{2n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (l-1)^2 & (l-1)^4 \ldots & (l-1)^{2n-2} \\ (l+1)^2 & (l+1)^4 \ldots & (l+1)^{2n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2 & n^4 \ldots & (n)^{2n-2} \end{vmatrix} = \frac{(n)!(2n-1)!(2n-3)!\ldots 3!1!}{(2n)!}\cdot 2(-1)^{l+1}\binom{2n}{n-l} \quad (28),$$

wie man leicht findet, wenn man beachtet, daß man es mit einer Vandermondeschen Determinante zu tun hat. Im Zähler tritt einmal die Determinante

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1^2 \ldots & 1^{2n-2} \\ 1 & 2^2 \ldots & 2^{2n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n^2 \ldots & n^{2n-2} \end{vmatrix} = \frac{-(2n-1)!(2n-3)!\ldots 3!1!(n)!}{(2n)!}\binom{2n}{n}$$

auf. Ferner eine zweite Determinante, deren eine Kolonne Binomialkoeffizienten sind und in der der Faktor von $(-1)^r a_1\binom{2n}{n-r}$ den Wert

$$(-1)^{r+1}\begin{vmatrix} 1^2 & 1^4 \ldots & 2^{2n-2} \\ 2^2 & 2^4 \ldots & 2^{2n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (r-1)^2 & (r-1)^4 \ldots & (r-1)^{2n-2} \\ (r+1)^2 & (r+1)^4 \ldots & (r+1)^{2n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2 & n^4 \ldots & n^{2n-2} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{r+1}(2n-1)!(2n-3\,!\ldots 3!1!n!2}{(2n)!}\binom{2n}{n-r}$$

hat. Der Zähler ist also

$$-2\,\alpha_1\frac{(2n-1)!(2n-3)!\ldots 3!1!}{(2n)!}\left[\binom{2n}{0}^2+\binom{2n}{1}^2+\ldots+\binom{2n}{n-1}^2+{}^1/_2\binom{2n}{n}\frac{1}{\alpha_1}\right] \quad (29).$$

Beachtet man den in (26) angegebenen Wert von α_1, so wird die eckige Klammer

$$\left[\binom{2n}{0}^2+\binom{2n}{1}^2+\ldots+\binom{2n}{n-1}^2+{}^1/_2\binom{2n}{n}^2\right]={}^1/_2\binom{4n}{2n}=P_0 \quad . \quad . \quad (30),$$

wie man leicht durch Quadrieren der Gleichung

$$(x+x^{-1})^{2n}=\binom{2n}{0}x^{2n}+\binom{2n}{1}x^{2n-2}\ldots+\binom{2n}{n-1}x^2+\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n-1}x^{-2}\ldots+\binom{2n}{0}x^{-2n},$$

Ausrechnen der rechten Seite und Gleichsetzen der von x unabhängigen Glieder findet. Aus den Gl. (28), (29) und (30) ergibt sich

$$\mu=(-1)^{l+1}\frac{\alpha_1}{2}\binom{4n}{2n}\bigg/\binom{2n}{n-l}.$$

Damit wird der in Gl. (16) auftretende Faktor von Δ_0^{2n}

$$(-1)^{n+l+1}\binom{2n}{n-l}\bigg/\binom{4n}{2n}.$$

Es wird somit

$$\eta_l'={}^1/_2\,S_l+(-1)^{n+l+1}\binom{2n}{n-l}\Delta_0^{2n}\bigg/\binom{4n}{2n},$$

und, wenn man (25) hinzunimmt, erhält man

$$\eta_l=y_l+(-1)^{n+l+1}\binom{2n}{n-l}\Delta_0^{2n}\bigg/\binom{4n}{2n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Insbesondere ergibt sich daraus für die Korrektur der mittleren Ordinate, die man ja überall bis auf die Randwerte anzuwenden hat,

$$\eta_0=y_0-(-1)^n\frac{[(2n)!]^3}{(n!)\cdot(4n)!}\Delta_0^{2n}.$$

Die folgende Zahlentafel gibt eine Uebersicht über die hier auftretenden Zahlenfaktoren.

Ordnung der Parabel	Korrektur an den Randordinaten							Korrektur der Hauptwerte
	y_{-7}	y_{-6}	y_{-5}	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
1							$-\frac{1}{6}\Delta_0^2$	$+\frac{1}{3}\Delta_0^2$
3						$-\frac{1}{70}\Delta_0^4$	$+\frac{2}{35}\Delta_0^4$	$-\frac{3}{35}\Delta_0^4$
5					$-\frac{1}{924}\Delta_0^6$	$+\frac{1}{154}\Delta_0^6$	$-\frac{5}{308}\Delta_0^6$	$+\frac{5}{231}\Delta_0^6$
7				$-\frac{1}{12870}\Delta_0^8$	$+\frac{4}{6435}\Delta_0^8$	$-\frac{14}{6435}\Delta_0^8$	$+\frac{56}{12870}\Delta_0^8$	$-\frac{7}{1287}\Delta_0^8$
9			$-\frac{1}{184756}\Delta_0^{10}$	$+\frac{5}{92378}\Delta_0^{10}$	$-\frac{45}{184756}\Delta_0^{10}$	$+\frac{30}{46189}\Delta_0^{10}$	$-\frac{105}{92378}\Delta_0^{10}$	$+\frac{63}{46189}\Delta_0^{10}$
11		$-\frac{1}{2704156}\Delta_0^{12}$	$+\frac{3}{676039}\Delta_0^{12}$	$-\frac{33}{1352078}\Delta_0^{12}$	$+\frac{55}{676039}\Delta_0^{12}$	$-\frac{495}{2704156}\Delta_0^{12}$	$+\frac{198}{676039}\Delta_0^{12}$	$-\frac{33}{96577}\Delta_0^{12}$
13	$-\frac{1}{40116600}\Delta_0^{14}$	$+\frac{7}{20058300}\Delta_0^{14}$	$-\frac{91}{40116600}\Delta_0^{14}$	$+\frac{91}{10029150}\Delta_0^{14}$	$-\frac{1001}{40116600}\Delta_0^{14}$	$+\frac{1001}{20058300}\Delta_0^{14}$	$-\frac{1001}{13372200}\Delta_0^{14}$	$+\frac{143}{1671525}\Delta_0^{14}$

Bemerkt sei noch, daß man in diesem Falle die Summe der Abweichungsquadrate in sehr einfacher Form angeben kann. Es ist

$$\sum \varepsilon^2 = (\Delta_0{}^{2n})^2 \cdot \sum_{l=-n}^{l=+n} \binom{2n}{n-l}^2 \Big/ \binom{4n}{2n}^2 = (\Delta_0{}^{2n})^2 \Big/ \binom{4n}{2n}.$$

6. Im Falle $n = m + 2$ erhält man zunächst für den Anteil η_l^g zur Berechnung der α_1, α_2 und μ aus (12), (8) und (9) die $n + 1$ linearen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}
0 + 0 + 0 \ldots + 0 - \alpha_1 \binom{2n-2}{n-1} - \alpha_2 \binom{2n}{n} = -1 \\
0 + \lambda_1 + \lambda_2 \ldots + \lambda_{n-2} + \alpha_1 \binom{2n-2}{n-2} + \alpha_2 \binom{2n}{n-1} = -1 \\
0 + 2^2\lambda_1 + 2^4\lambda_2 \ldots + 2^{2n-4}\lambda_{n-2} - \alpha_1 \binom{2n-2}{n-3} - \alpha_2 \binom{2n}{n-2} = -1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-\mu + l^2\lambda_1 + l^4\lambda_2 \ldots + l^{2n-4}\lambda_{n-2} + (-1)^{l-1}\alpha_1 \binom{2n-2}{n-1-l} + (-1)^{l-1}\alpha_2 \binom{2n}{n-l} = -1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 + (n-1)^2\lambda_1 + (n-1)^4\lambda_2 \ldots + (n-1)^{2n-4}\lambda_{n-2} + (-1)^{n-2}\alpha_1 \binom{2n-2}{0} + (-1)^{n-2}\alpha_2 \binom{2n}{1} = -1 \\
0 + n^2\lambda_1 + n^4\lambda_2 \ldots + n^{2n-4}\lambda_{n-2} + 0 + (-1)^{n-1}\alpha_2 \binom{2n}{0} = -1
\end{array}\right\} \quad (32).$$

Der Zähler von α_1 wird

$$= (-1)^{l+1} \left| \begin{array}{cccccc}
0 & 0 & \ldots & 0 & +1 & -\binom{2n}{n} \\
1^2 & 1^4 & \ldots & 1^{2n-4} & +1 & +\binom{2n}{n-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(l-1)^2 & (l-1)^4 & \ldots & (l-1)^{2n-4} & +1 & (-1)^{l-2}\binom{2n}{n+1-l} \\
(l+1)^2 & (l+1)^4 & \ldots & (l+1)^{2n-4} & +1 & (-1)^{l}\binom{2n}{n-1-l} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
n^2 & n^4 & \ldots & n^{2n-4} & +1 & (-1)^{n-1}\binom{2n}{0}
\end{array} \right|$$

$$= (-1)^{l+1} \begin{vmatrix} \binom{2n}{n-1} & 1^2 & 1^4 & \dots & 1^{2n-4} \\ -\binom{2n}{n-2} & 2^2 & 2^4 & \dots & 2^{2n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{l-2}\binom{2n}{n+1-l} & (l-1)^2 & (l-1)^4 & \dots & (l-1)^{2n-4} \\ (-1)^{l}\binom{2n}{n-1-l} & (l+1)^2 & (l+1)^4 & \dots & (l+1)^{2n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n-1}\binom{2n}{0} & n^2 & n^4 & & n^{2n-4} \end{vmatrix} + (-1)^{l+1}\binom{2n}{n} \begin{vmatrix} 1 & 1^2 & \dots & 1^{2n-4} \\ 1 & 2^2 & \dots & 2^{2n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (l-1)^2 & \dots & (l-1)^{2n-4} \\ 1 & (l+1)^2 & \dots & (l+1)^{2n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n^2 & & n^{2n-4} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{l+1} \sum_{r=1}^{n} \left[\binom{2n}{n-r}^2 4(l^2 - r^2) + \binom{2n}{n}^2 2l^2 \right] \binom{2n}{n-l} \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\dots 1!\,n!}{(2n)!^2}$$

$$= (-1)^{l+1} \left[\binom{4n}{2n} 2l^2 - 2n \binom{4n-2}{2n-1} \right] \binom{2n}{n-l} \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\dots 1!\,n!}{(2n)!^2},$$

wobei man außer der Formel (30) noch die folgende beachten muß:

$$\frac{n}{2}\binom{4n-2}{2n-1} = \binom{2n}{n-1}^2 1^2 + \binom{2n}{n-2}^2 2^2 + \binom{2n}{n-3}^2 3^2 + \dots + \binom{2n}{0}^2 n^2 = P_2 \quad . \quad (33).$$

Nimmt man noch $\binom{4n-2}{2n-1}$ vor die Klammer, so wird der Zähler von α_1

$$(-1)^{l+1}\, 2 \cdot \binom{4n-2}{2n-1} \binom{2n}{n-l} \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\dots 1!\,n!}{(2n)!^2} \left[l^2 (4n-1) - n^2 \right] \quad . \quad (34).$$

Für den Zähler von α_2 ergibt eine ganz ähnliche Umformung

$$(-1)^l \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\dots 1!\,n!}{(2n)!^2} \binom{2n}{n-l} \left[\binom{2n-2}{n-1} \cdot \binom{2n}{n} 2l^2 + \sum_{r=1}^{n} \binom{2n-2}{n-1-r} \binom{2n}{n-r} 4(l^2 - r^2) \right]$$

und daraus, wenn man die beiden Gleichungen

$$\frac{n}{2}\binom{4n-4}{2n-3} = \binom{2n}{n-1}\binom{2n-2}{n-2} + \binom{2n}{n-2}\binom{2n-2}{n-3} 2^2 + \binom{2n}{n-3}\binom{2n-2}{n-4} 3^2 + \dots \binom{2n}{1}\binom{2n-2}{0}(n-l)^2$$

$$\binom{4n-2}{2n-1} = \binom{2n}{n}\binom{2n-2}{n-1} + 2\binom{2n}{n-1}\binom{2n-2}{n-2} + 2\binom{2n}{n-2}\binom{2n-2}{n-3} + \dots 2\binom{2n}{1}\binom{2n-2}{0}$$

beachtet,

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^l\, 2 \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\dots 1!\,n!}{(2n)!^2} \binom{2n}{n-l} \left[l^2 \binom{4n-2}{2n-1} - n \binom{4n-4}{2n-3} \right] \\ &= (-1)^l\, 4 \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\dots 1!\,n!}{(2n)!^2} \binom{2n}{n-l} \binom{4n-4}{2n-2} \left[l^2 (4n-3) - (n-1)\cdot n \right] \end{aligned}\right\} \quad (35).$$

Schließlich muß der Zähler von $-\mu$ bestimmt werden. In Determinantenform schreibt sich dieser

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\binom{2n-2}{n-1} & -\binom{2n}{n} \\ 1 & 1^2 & 1^4 & \dots & 1^{2n-4} & +\binom{2n-2}{n-2} & +\binom{2n}{n-1} \\ 1 & 2^2 & 2^4 & \dots & 2^{2n-4} & -\binom{2n-2}{n-3} & -\binom{2n}{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n^2 & n^4 & \dots & n^{2n-4} & 0 & (-1)^{n+1}\binom{2n}{0} \end{vmatrix}$$

Faßt man die letzten beiden Spalten zusammen, so hat man, wenn die erste Zeile vorkommt, als Faktor von

$$(-1)^{r+2}\binom{2n-2}{n-1}\binom{2n}{n-r} - \binom{2n}{n}\binom{2n-2}{n-1-r} = (-1)^{r+2}\binom{2n}{n}\binom{2n}{n-r}\frac{r^2}{(2n-1)\cdot 2n}$$

eine Vandermondesche Determinante, die sich umformt in

$$(-1)^{r+1}\frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!\,n!}{(2n)!^2}\binom{2n}{n-r}\binom{2n}{n}\cdot 2r^2,$$

und wenn die erste Zeile nicht vorkommt, ist der Faktor von $(s > r)$

$$(-1)^{s+r}\binom{2n-2}{n-1-s}\binom{2n}{n-r}-\binom{2n}{n-s}\binom{2n-2}{n-1-r}=(-1)^{s+r}\binom{2n}{n-r}\binom{2n}{n-s}\frac{r^2-s^2}{(2n-1)\cdot 2n}$$

ebenfalls eine Vandermondesche Determinante, die den Wert

$$(-1)^{s+r+1}\frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!\,n!}{(2n)!^2}\binom{2n}{n-s}\binom{2n}{n-r}4(r^2-s^2)$$

hat, so daß man als Zähler von $-\mu$ erhält:

$$\frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!\,n!\cdot 2}{(2n)!^2\,(2n-1)\cdot 2n}\sum_{r=1}^{n}\binom{2n}{n-r}^2\left[\binom{2n}{n}^2 r^4+\sum_{s=r+1}^{n}\binom{2n}{n-s}^2 2(r^2-s^2)^2\right].$$

Die hier auftretende Doppelsumme läßt sich nun wiederum umformen, wobei man außer den Gl. (30) und (33) noch zu beachten hat

$$\binom{4n-4}{2n-2}\frac{3n-2}{2n-1}n^2=n^4+\binom{2n}{1}^2(n-1)^4+\binom{2n}{2}^2(n-2)^4\ldots+\binom{2n}{n-1}^2 1^4=P_4 \quad (36).$$

Die Doppelsumme schreibt sich nämlich

$$\sum_{r=1}^{n}\binom{2n}{n-r}^2 r^4\left[\binom{2n}{0}^2+2\sum_{s=1}^{n}\binom{2n}{n-s}^2\right]-2\left[\sum_{r=1}^{n}\binom{2n}{n-r}^2 r^2\right]^2=2\,(P_4\cdot P_0-P_2^2)$$

$$=\binom{4n}{2n}\binom{4n-4}{2n-2}\frac{3n-2}{2n-1}n^2-\binom{4n-2}{2n-1}^2\frac{n^2}{2}=\binom{4n-4}{2n-2}\binom{4n-2}{2n-1}(2n-1)\cdot 2n,$$

so daß der Zähler von $-\mu$

$$\frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!\,n!}{(2n)!^2}\,2\binom{4n-4}{2n-2}\binom{4n-2}{2n-1} \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

wird. Aus (34) und (37) ergibt sich der Faktor von Δ_0^{2n-2} nach (16) zu

$$(-1)^{n-1}\frac{\alpha_1}{2\mu}=(-1)^{n+l-1}\frac{\binom{2n}{n-l}\left[l^2\frac{4n-1}{n}-n\right]}{2\binom{4n-4}{2n-2}} \quad \ldots\ldots \quad (38),$$

und aus (35) und (37) findet man für den Faktor von Δ_0^{2n}

$$-(-1)^{n-1}\frac{\alpha_2}{2\mu}=(-1)^{n+l-1}\frac{\binom{2n}{n-l}\left[l^2\frac{4n-3}{2n-1}-\frac{(n-1)\,n}{2n-1}\right]}{\binom{4n-2}{2n-1}} \quad \ldots \quad (39).$$

Da die ungeraden Koeffizienten zur Korrektur der mittleren Ordinate keinen Beitrag liefern, kann man schon jetzt hinschreiben, daß

$$\eta_0=y_0+(-1)^n\frac{(2n-2)!^2\,(2n-1)!\,n^2}{n!^2\,(4n-4)!}\left(\Delta_0^{2n-2}+\frac{n-1}{4n-3}\Delta_0^{2n}\right) \quad \ldots \quad (40).$$

ist.

7. Es handelt sich jetzt weiter um den Beitrag der Glieder mit ungeradem Index. Die Größen β_2 und ν berechnen sich aus den Gl. (20) und (21), die, ausführlich geschrieben, folgendermaßen lauten:

$$0+\varkappa_1+\varkappa_2+\ldots+\varkappa_{n-2}+\beta_2\binom{2n}{n-1}=-1$$

$$0+2^2\varkappa_1+2^4\varkappa_2+\ldots+2^{2n-4}\varkappa_{n-2}-\beta_2\binom{2n}{n-2}=-1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-\frac{\nu}{l}+l^2\varkappa_1+l^4\varkappa_2+\ldots+l^{2n-4}\varkappa_{n-2}+(-1)^{l-1}\beta_2\binom{2n}{n-l}=-1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0+n^2\varkappa_1+n^4\varkappa_2+\ldots+n^{2n-4}\varkappa_{n-2}+(-1)^{n-1}\beta_2\binom{2n}{0}=-1.$$

Der Zähler von β_2 wird also wieder eine **Vandermondesche** Determinante, die sich umformt in

$$(-1)^{l+n} \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!\,2\,l^2 \binom{2n}{n-l}}{n!\,(2n)!},$$

während der Zähler von $-\nu/l$ den Wert

$$(-1)^n \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!\cdot 2}{n!\,(2n)!} \sum_{r=1}^{n} \binom{2n}{n-r} r^2$$

hat, wofür man nach (33) auch schreiben kann

$$(-1)^n \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!}{n!\,(2n)!} \binom{4n-2}{2n-1} n.$$

Damit wird der Faktor von $\overline{\Delta^{2n}}$ in (24)

$$(-1)^n \frac{\beta_2}{2\nu} = (-1)^{n+l-1} \frac{l\binom{2n}{n-l}}{n\binom{4n-2}{2n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41),$$

und damit ist die gesamte an y_l anzubringende Korrektur bestimmt. Nach (38), (39) und (41) wird

$$\eta_l = y_l + (-1)^{n+l+1} \frac{\binom{2n}{n-l}}{\binom{4n-2}{2n-1}} \left[\frac{4n-3}{2n-1}\left(l^2 \frac{4n-1}{n} - n\right) \Delta_0^{2n-2}\right.$$

$$\left. + \left(l_2 \frac{4n-3}{2n-1} - \frac{(n-1)\,n}{2n-1}\right) \Delta_0^{2n} + \frac{l}{n} \overline{\Delta_0^{2n}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42).$$

In der folgenden Zahlentafel sind die Beiwerte der einzelnen Differenzen angegeben.

(Vergl. die Zahlentafel auf Seite 176.)

Für die Summe der Quadrate der Abweichungen ergibt sich in diesem Fall

$$\Sigma \varepsilon^2 = \left[2(4n-1)(4n-3)(\Delta_0^{2n-2})^2 + 4n(4n-3)\,\Delta_0^{2n}\,\Delta_0^{2n-2} + n(2n-1)(\Delta_0^{2n})^2 + \frac{1}{n}(\overline{\Delta_0^{2n}})^2\right] : \binom{4n-2}{2n-1}.$$

8. Ist $n = m + 3$, so berechnen sich μ, α_1, α_2 und α_3 aus den Gleichungen

$$\begin{array}{llllllll}
0 & +\,0 & \ldots & +\,0 & -\,\alpha_1\binom{2n-4}{n-2} & -\,\alpha_2\binom{2n-2}{n-1} & -\,\alpha_3\binom{2n}{n} & = -1 \\
0 & +\,\lambda_1 & \ldots & +\,\lambda_{n-3} & +\,\alpha_1\binom{2n-4}{n-3} & +\,\alpha_2\binom{2n-2}{n-2} & +\,\alpha_3\binom{2n}{n-1} & = -1 \\
0 & +\,2^2\lambda_1 & \ldots & +\,2^{2n-6}\lambda_{n-3} & -\,\alpha_1\binom{2n-4}{n-4} & -\,\alpha_2\binom{2n-2}{n-3} & -\,\alpha_3\binom{2n}{n-2} & = -1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-\mu & +\,l^2\lambda_1 & \ldots & +\,l^{2n-6}\lambda_{n-3} & +(-1)^{l+1}\alpha_1\binom{2n-4}{n-2-l} & +(-1)^{l+1}\alpha_2\binom{2n-2}{n-1-l} & +(-1)^{l+1}\alpha_3\binom{2n}{n-l} & = -1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & +(n-2)^2\lambda_1 & \ldots & +(n-2)^{2n-6}\lambda_{n-3} & +(-1)^{n-1}\alpha_1\binom{2n-4}{0} & +(-1)^{n-1}\alpha_2\binom{2n-2}{1} & +(-1)^{n-1}\alpha_3\binom{2n}{2} & = -1 \\
0 & +(n-1)^2\lambda_1 & \ldots & +(n-1)^{2n-6}\lambda_{n-3} & 0 & +(-1)^n\,\alpha_2\binom{2n-2}{0} & +(-1)^n\,\alpha_3\binom{2n}{1} & = -1 \\
0 & +\,n^2\lambda_1 & \ldots & +\,n^{2n-6}\lambda_{n-3} + & 0 & +\quad 0 & +(-1)^{n+1}\alpha_3\binom{2n}{0} & = -1
\end{array}$$

Der Zähler von $-\mu$ wird also durch eine Determinante dargestellt, deren letzte drei Spalten Binomialkoeffizienten sind. Faßt man irgend drei Zeilen dieser drei Spalten zusammen, so läßt sich diese dreireihige Determinante wesentlich vereinfachen. Ihre zugehörige Unterdeterminante ist eine **Vandermondesche** Determinante, die sich ebenfalls umformen läßt. Man erhält als Wert des Zählers eine dreifache Summe.

Faktoren von Δ_0^{2n-2}.

Ordnung der Parabel	Korrektur der Randordinaten							Korrektur der Hauptwerte
	y_{-7}	y_{-6}	y_{-5}	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
1						$-1\,\Delta_0^{2}$	$+\frac{1}{2}\Delta_0^{2}$	$+1\,\Delta_0^{2}$
3					$-\frac{3}{14}\Delta_0^{4}$	$+\frac{1}{2}\Delta_0^{4}$	$-\frac{1}{14}\Delta_0^{4}$	$-\frac{3}{7}\Delta_0^{4}$
5				$-\frac{1}{33}\Delta_0^{6}$	$+\frac{17}{132}\Delta_0^{6}$	$-\frac{1}{6}\Delta_0^{6}$	$-\frac{1}{132}\Delta_0^{6}$	$+\frac{5}{33}\Delta_0^{6}$
7			$-\frac{1}{286}\Delta_0^{8}$	$+\frac{31}{1430}\Delta_0^{8}$	$-\frac{73}{1430}\Delta_0^{8}$	$+\frac{34}{715}\Delta_0^{8}$	$+\frac{7}{715}\Delta_0^{8}$	$-\frac{7}{143}\Delta_0^{8}$
9		$-\frac{3}{8398}\Delta_0^{10}$	$+\frac{49}{16796}\Delta_0^{10}$	$-\frac{83}{8398}\Delta_0^{10}$	$+\frac{15}{884}\Delta_0^{10}$	$-\frac{105}{8398}\Delta_0^{10}$	$-\frac{3}{646}\Delta_0^{10}$	$+\frac{63}{4199}\Delta_0^{10}$
11	$-\frac{1}{29716}\Delta_0^{12}$	$+\frac{71}{208012}\Delta_0^{12}$	$-\frac{313}{208012}\Delta_0^{12}$	$+\frac{383}{104006}\Delta_0^{12}$	$-\frac{1067}{208012}\Delta_0^{12}$	$+\frac{649}{208012}\Delta_0^{12}$	$+\frac{363}{208012}\Delta_0^{12}$	$-\frac{33}{7429}\Delta_0^{12}$

Faktoren von Δ_0^{2n}.

Ordnung der Parabel	Korrektur der Randordinaten							Hauptwerte
	y_{-7}	y_{-6}	y_{-5}	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
1						$-\frac{3}{10}\Delta_0^{4}$	$+\frac{1}{5}\Delta_0^{4}$	$+\frac{1}{5}\Delta_0^{4}$
3					$-\frac{5}{84}\Delta_0^{6}$	$+\frac{1}{7}\Delta_0^{6}$	$-\frac{1}{28}\Delta_0^{6}$	$-\frac{2}{21}\Delta_0^{6}$
5				$-\frac{7}{858}\Delta_0^{8}$	$+\frac{5}{143}\Delta_0^{8}$	$-\frac{20}{429}\Delta_0^{8}$	$+\frac{1}{429}\Delta_0^{8}$	$+\frac{5}{143}\Delta_0^{8}$
7			$-\frac{9}{9724}\Delta_0^{10}$	$+\frac{14}{2431}\Delta_0^{10}$	$-\frac{133}{9724}\Delta_0^{10}$	$+\frac{32}{2431}\Delta_0^{10}$	$+\frac{7}{4862}\Delta_0^{10}$	$-\frac{28}{2431}\Delta_0^{10}$
9		$-\frac{11}{117572}\Delta_0^{12}$	$+\frac{45}{58786}\Delta_0^{12}$	$-\frac{9}{3458}\Delta_0^{12}$	$+\frac{265}{58786}\Delta_0^{12}$	$-\frac{405}{117572}\Delta_0^{12}$	$-\frac{27}{29393}\Delta_0^{12}$	$+\frac{15}{4199}\Delta_0^{12}$
11	$-\frac{13}{1485800}\Delta_0^{14}$	$+\frac{33}{371450}\Delta_0^{14}$	$-\frac{583}{1485800}\Delta_0^{14}$	$+\frac{179}{185725}\Delta_0^{14}$	$-\frac{2013}{1485800}\Delta_0^{14}$	$+\frac{319}{371450}\Delta_0^{14}$	$+\frac{33}{87400}\Delta_0^{14}$	$-\frac{198}{185725}\Delta_0^{14}$

Faktoren von $\overline{\Delta_0^{2n}}$.

Ordnung der Parabel	Korrektur der Randordinaten							Hauptwerte
	y_{-7}	y_{-6}	y_{-5}	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
1						$-\frac{1}{20}\overline{\Delta_0^{4}}$	$+\frac{1}{10}\overline{\Delta_0^{4}}$	—
3					$-\frac{1}{252}\overline{\Delta_0^{6}}$	$+\frac{1}{63}\overline{\Delta_0^{6}}$	$-\frac{5}{252}\overline{\Delta_0^{6}}$	—
5				$-\frac{1}{3432}\overline{\Delta_0^{8}}$	$+\frac{1}{572}\overline{\Delta_0^{8}}$	$-\frac{7}{1716}\overline{\Delta_0^{8}}$	$+\frac{7}{1716}\overline{\Delta_0^{8}}$	—
7			$-\frac{1}{48620}\overline{\Delta_0^{10}}$	$+\frac{2}{12155}\overline{\Delta_0^{10}}$	$-\frac{27}{48620}\overline{\Delta_0^{10}}$	$+\frac{12}{12155}\overline{\Delta_0^{10}}$	$+\frac{21}{24310}\overline{\Delta_0^{10}}$	—
9		$-\frac{1}{705432}\overline{\Delta_0^{12}}$	$+\frac{5}{352716}\overline{\Delta_0^{12}}$	$-\frac{11}{176358}\overline{\Delta_0^{12}}$	$+\frac{55}{352716}\overline{\Delta_0^{12}}$	$-\frac{55}{235144}\overline{\Delta_0^{12}}$	$+\frac{11}{58786}\overline{\Delta_0^{12}}$	—
11	$-\frac{1}{10400600}\overline{\Delta_0^{14}}$	$+\frac{3}{2600150}\overline{\Delta_0^{14}}$	$-\frac{13}{2080120}\overline{\Delta_0^{14}}$	$+\frac{26}{1300075}\overline{\Delta_0^{14}}$	$-\frac{429}{10400600}\overline{\Delta_0^{14}}$	$+\frac{143}{2600150}\overline{\Delta_0^{14}}$	$-\frac{429}{10400600}\overline{\Delta_0^{14}}$	—

$$(-1)^{n+1}\, 4\, \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!\,n!}{(2n)!^3\,(2n-3)\,(2n-2)\,(2n-1)\cdot 2n} \sum_{p=1}^{n} \sum_{r=p+1}^{n} \binom{2n}{n-p}^2 \binom{2n}{n-r}^2 \cdot$$

$$\left[\binom{2n}{n}^2 r^4 p^4 (r^2-p^2)^2 + 2 \sum_{s=r+1}^{n} \binom{2n}{n-s}^2 \cdot (r^2-p^2)^2 (s^2-r^2)^2 (p^2-s^2)^2\right].$$

Diese dreifache Summe läßt sich nun auch folgendermaßen schreiben:

$$\tfrac{1}{3} \sum_{p=1}^{n} \left\{\binom{2n}{n-p}^2 \sum_{r=1}^{n} \left[\binom{2n}{n}^2 p^4 + 2\binom{2n}{n-r}^2 (r^2-p^2)^2\right] \cdot \left[\sum_{q=1}^{n} \binom{2n}{n-q}^2 q^4 (q^2-p^2)^2\right]\right\}$$

$$-\tfrac{2}{3} \sum_{p=1}^{n} \left\{\binom{2n}{n-p}^2 \left[\sum_{r=1}^{n} \binom{2n}{n-r}^2 p^2 (r^2-p^2)^2\right]^2\right\} + \tfrac{1}{6} \binom{2n}{n}^2 \sum_{r=1}^{n} \left[\binom{2n}{n-r}^2 r^4 \sum_{q=1}^{n} \binom{2n}{n-q}^2 q^4 (q^2-r^2)^2\right].$$

Beachtet man nun außer den Gl. (30), (33) und (36) noch, daß

$$\left.\begin{aligned} P_6 &= n^6 + \binom{2n}{1}^2 (n-1)^6 + \binom{2n}{2}^2 (n-2)^6 + \ldots \binom{2n}{n-1}^2 1^6 \\ &= \binom{4n-6}{2n-3} \frac{n^2}{(n-1)\,(2n-1)} (15n^3 - 30n^2 + 16n - 2) \\ P_8 &= n^8 + \binom{2n}{1}^2 (n-1)^8 + \binom{2n}{2}^2 (n-2)^8 + \ldots + \binom{2n}{n-1}^2 1^8 \\ &= \binom{4n-8}{2n-4} \frac{2n^2}{(2n-3)\,(n-1)\,(2n-1)} (105n^5 - 420n^4 + 588n^3 - 356n^2 + 96n - 10) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (43)$$

ist, so erhält man für diesen Ausdruck

$$(2P_0 P_4 P_8 - 2P_2^2 P_8 - 2P_0 P_6^2 - 2P_4^3 + 4P_2 P_4 P_6) = \binom{4n-4}{2n-2} \binom{4n-6}{2n-3} \binom{4n-8}{2n-4} 96 n^3 (2n-1)^2 (2n-3).$$

Somit wird der Zähler von $-\mu$

$$(-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!\,n!}{(2n)!^3\,(n-1)}\, n \binom{4n-4}{2n-2} \binom{4n-6}{2n-3} \binom{4n-8}{2n-4} \cdot 48 \quad . \quad . \quad (44).$$

Der Zähler von α_1 wird eine Determinante, deren beiden letzten Spalten Binomialkoeffizienten sind und deren Wert

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^{n+l+1} \binom{2n}{n-l} \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!\,n!}{(2n-1)\,2n\,(2n)!^3} \cdot \\ &4 \sum_{p=1}^{n-1} \left\{\binom{2n}{n-p}^2 \cdot \sum_{r=p+1}^{n} \left[\binom{2n}{n}^2 (p^4 l^4 - p^6 l^2) + 2\binom{2n}{n-r}^2 (p^2-r^2)^2 (l^2-r^2)(l^2-p^2)\right]\right\} \end{aligned}\right\} \quad (45).$$

ist. Die Summe läßt sich folgendermaßen umschreiben:

$$\left[2 \sum_{r=1}^{n} \binom{2n}{n-r}^2 (l^2-r^2) + l^2 \binom{2n}{n}^2\right] \cdot \left[\sum_{p=1}^{n} \binom{2n}{n-p}^2 (p^4 l^2 - p^6)\right]$$

$$-2\left[\sum_{r=1}^{n} \binom{2n}{n-r}^2 (l^2 r^2 - r^4)\right]^2 = 2\left[(l^2 P_0 - P_2)(l^2 P_4 - P_6) - (l^2 P_2 - P_4)^2\right].$$

Benutzt man die Gl. (30), (33), (36) und (43), so kann man dafür setzen:

$$\left.\begin{aligned} &\left[l^2 \binom{4n}{2n} - n\binom{4n-2}{2n-1}\right] \cdot \left[l^2 \binom{4n-4}{2n-2} \frac{3n-2}{2n-1} \cdot n^2 - \frac{n^2}{(n-1)\,(2n-1)} (15n^3 - 30n^2 \right. \\ &\qquad \left. + 16n - 2) \binom{4n-6}{2n-3}\right] - 2\left[l^2 \frac{n}{2} \binom{4n-2}{2n-1} - \binom{4n-4}{2n-2} \frac{3n-2}{2n-1} n^2\right] \\ &= \binom{4n-4}{2n-2} \binom{4n-6}{2n-3} \frac{4n}{n-1} [l^4 (4n-3)(4n-5) - l^2 (4n-3)(6n^2 - 8n + 1) \\ &\qquad + 3n^2 (n-1)^2] \end{aligned}\right\} \quad (46).$$

Damit hat man den Koeffizienten von Δ_0^{2n-4} gefunden:

$$(-1)^n \frac{\alpha_1}{2\mu} = (-1)^{n+l+1} \frac{\binom{2n}{n-l} [l^4 (4n-3)(4n-5) - l^2 (4n-3)(6n^2 - 8n + 1) + 3n^2 (n-1)^2]}{\binom{4n-8}{2n-4} 12\,(2n-1)\,n} \quad (47).$$

Ganz entsprechend rechnet man für den Zähler von α_2 aus

$$\left.\begin{aligned}(-1)^{n+l}\binom{2n}{n-l}\frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!\,n!\,4}{(2n)!^3(2n-3)(2n-2)(2n-1)\,2n}\sum_{p=1}^{n}\Big\{\binom{2n}{n-p}^2\cdot\sum_{r=p+1}^{n}\Big[\binom{2n}{n}^2 p^4 l^2[(n-1)^2\\ +n^2-p^2](l^2-p^2)+2\binom{2n}{n-r}^2(p^2-r^2)^2[(n-1)^2+n^2-p^2-r^2](l^2-r^2)(l^2-p^2)\Big]\Big\}\end{aligned}\right\}\quad(48).$$

Die hier auftretende Summe läßt sich in die Form bringen:

$$\begin{aligned}&[(n-1)^2+n^2](l^2P_4-P_6)(2l^2P_0-2P_2)-(l^2P_6-P_8)(2l^2P_0-2P_2)\\ &\qquad+2(l^2P_4-P_6)(l^2P_2-P_4)-2(l^2P_2-P_4)^2[(n-1)^2+n^2],\end{aligned}$$

wenn man die Bezeichnungen der Gl. (30), (33), (36) und (43) benutzt. Nach einigen Umformungen ergibt sich daraus:

$$\left.\begin{aligned}8\binom{4n-4}{2n-2}\binom{4n-6}{2n-3}\frac{n(2n-1)(2n-3)}{(4n-7)}[l^4(4n-3)(4n-7)-l^2(24n^3-68n^2\\ +47n-6)+3(n-2)(n-1)n^2]\end{aligned}\right\}\quad(49).$$

Aus (44), (48) und (49) findet man den Faktor von Δ_0^{2n-2}.

$$(-1)^{n+1}\frac{\alpha_2}{2\mu}=(-1)^{l+n+1}\frac{\binom{2n}{n-l}[l^4(4n-3)(4n-7)-l^2(24n^3-68n^2+47n-6)+3(n-2)(n-1)n^2]}{\binom{4n-8}{2n-4}12n(4n-7)}\quad(50).$$

Schließlich ergibt sich der Zähler von α_3:

$$\left.\begin{aligned}(-1)^{n+l+1}\frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!\,n!\,4}{(2n)!^3(2n-3)(2n-2)(2n-1)^2(2n)^2}\binom{2n}{n-l}\cdot\sum_{p=1}^{n}\Big\{\binom{2n}{n-p}^2\sum_{r=p+1}^{n}\Big[\binom{2n}{n}^2(n^2-p^2)n^2p^4l^2(l^2-p^2)\\ +2\binom{2n}{n-r}^2(n^2-p^2)(n^2-r^2)(p^2-r^2)^2(l^2-p^2)(l^2-r^2)\Big]\Big\}\end{aligned}\right\}\quad(51).$$

Auch diese Summe läßt sich umformen in

$$(2l^2n^2P_0-2(n^2+l^2)P_2+2P_4)(l^2n^2P_4-(n^2+l^2)P_6+P_8)-2(n^2l^2P_2-(n^2+l^2)P_4+P_6)^2,$$

und daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}\binom{4n-4}{2n-2}\binom{4n-6}{2n-3}\frac{8n^3(2n-1)^2(2n-3)}{(4n-5)(4n-7)}[l^4(4n-5)(4n-7)-l^2(4n-5)(6n^2-14n+5)\\ +3(n-2)(n-1)^2n]\end{aligned}\right\}\quad(52).$$

Aus (44), (51) und (52) erhält man dann den Faktor von Δ_0^{2n-2}:

$$(-1)^n\frac{\alpha_3}{2\mu}=(-1)^{n+l+1}\frac{\binom{2n}{n-l}}{24\binom{4n-8}{2n-4}}\left[l^4-l^2\frac{6n^2-14n+5}{4n-7}+\frac{3(n-2)(n-1)^2n}{(4n-5)(4n-7)}\right]\quad(53).$$

Die Verbesserung der mittleren Ordinate läßt sich jetzt schon angeben:

$$\eta_0=y_0-(-1)^{n+1}\frac{\binom{2n}{n}}{4\binom{4n-8}{2n-4}}n(n-1)\left[\frac{n-1}{2n-1}\Delta_0^{2n-4}+\frac{n-2}{4n-7}\Delta_0^{2n-2}+\frac{(n-2)(n-1)}{2(4n-5)(4n-7)}\Delta_0^{2n}\right].$$

9. Für die Verbesserungen der anderen Ordinaten sind noch die Beiträge der Koeffizienten mit den ungeraden Indices zu berechnen. Die in Betracht kommenden Gleichungen sind:

$$\begin{array}{lllllll}0 & +\varkappa_1 & \ldots & +\varkappa_{n-3} & +\beta_2\binom{2n-2}{n-2} & +\beta_3\binom{2n}{n-1} & =-1\\ 0 & +2^2\varkappa_1 & \ldots & +2^{2n-6}\varkappa_{n-3} & -\beta_2\binom{2n-2}{n-3} & -\beta_3\binom{2n}{n-2} & =-1\\ \ldots & & & & & & \\ -\frac{\nu}{l}+ & l^2\varkappa_1 & \ldots+ & l^{2n-6}\varkappa_{n-3} & +(-1)^{l-1}\beta_2\binom{2n-2}{n-1-l} & +(-1)^{l-1}\beta_3\binom{2n}{n-l} & =-1\\ \ldots & & & & & & \\ 0 & +(n-l)^2\varkappa_1 & \ldots+ & (n-l)^{2n-6}\varkappa_{n-3} & +(-1)^{n-2}\beta_2\binom{2n-2}{0} & +(-1)^{n-2}\beta_3\binom{2n}{1} & =-1\\ 0 & +n^2\varkappa_1 & \ldots+ & n^{2n-6}\varkappa_{n-3} & 0 & +(-1)^{n-1}\beta_3\binom{2n}{0} & =-1\end{array}$$

Daraus ergibt sich zunächst der Zähler von $-\frac{\nu}{l}$ zu

$$Z_1 = \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!}{n!\,(2n)!^2\, 2n\,(2n-1)} \sum_{p=1}^{n} \sum_{r=p+1}^{n} 4\,p^2 r^2 (p^2 - r^2)^2 \binom{2n}{n-p}^2 \binom{2n}{n-r}^2.$$

Die Summe formt sich um in

$$\sum_{p=1}^{n} \binom{2n}{n-p}^2 p^6 \cdot \sum_{r=1}^{n} \binom{2n}{n-r}^2 r^2 - \left[\sum_{r=1}^{n} \binom{2n}{n-r}^2 r^4\right]^2 = P_6 P_2 - P_4^2,$$

und unter Benutzung der Gl. (33), (36) und (43) wird daraus

$$6 \binom{4n-4}{2n-2} \binom{4n-6}{2n-3} n^3 (n-1).$$

Somit ist

$$Z_1 = \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!}{n!\,(2n)!}\, 12 \binom{4n-4}{2n-2} \binom{4n-6}{2n-3} \frac{n^2(n-1)}{2n-1} \quad \ldots \quad (54).$$

Für den Zähler von β_2 findet man

$$\begin{aligned} Z_2 &= (-1)^l \binom{2n}{n-l} \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!}{(2n)!\,n!} \sum_{r=1}^{n} \binom{2n}{n-p}^2 4\,p^2 l^2 (l^2 - p^2) \\ &= (-1)^l \binom{2n}{n-l} \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!}{(2n)!\,n!} (4\,l^4 P_4 - 4\,l^2 P_4) \\ &= (-1)^l \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!}{(2n)!\,n!} \binom{2n}{n-l} \frac{4\,n\,l^2}{2n-1} [l^2 (4n-3) - n(3n-2)] \quad (55). \end{aligned}$$

Aus (54) und (55) erhält man den Faktor von $\overline{\Delta_0^{2n-2}}$

$$(-1)^n \frac{\beta_2}{2\nu} = (-1)^{n+l+1} \frac{\binom{2n}{n-l}\, l\,[l^2(4n-3) - n(3n-2)]}{\binom{4n-6}{2n-3}\, 6\,n\,(n-1)}.$$

Aehnlich berechnet sich der Zähler von β_3

$$Z_3 = (-1)^{l+1} \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!}{(2n)!\,n!}\, l^2 \binom{2n}{n-l} \sum_{p=1}^{n} \binom{2n-2}{n-1-p} \binom{2n}{n-p} (4\,l^2 p^2 - 4\,p^4) \quad (56).$$

Benutzt man nun folgende Formeln:

$$\frac{n}{2} \binom{4n-4}{2n-3} = \binom{2n}{n-1} \binom{2n-2}{n-2} 1^2 + \binom{2n}{n-2} \binom{2n-2}{n-3} 2^2 \ldots \binom{2n}{1} \binom{2n-2}{0} (n-1)^2,$$

$$\frac{n}{2} \frac{3n^2-5n+1}{4n-5} \binom{4n-4}{2n-3} = \binom{2n}{n-1} \binom{2n-2}{n-2} 1^4 + \binom{2n}{n-2} \binom{2n-2}{n-3} 2^4 + \ldots + \binom{2n}{1} \binom{2n-2}{0} (n-1)^4,$$

so kann man für (56) schreiben

$$Z_3 = (-1)^{l+1} \frac{(2n-1)!\,(2n-3)!\ldots 1!}{(2n)!\,n!}\, l^2 \binom{2n}{n-l} \frac{4\,n(n-1)}{2n-1} \binom{4n-4}{2n-2} \frac{l^2(4n-5) - (3n^2-5n+1)}{4n-5} \quad (57).$$

Aus (54) und (57) berechnet sich der Faktor von $\overline{\Delta_0^{2n}}$

$$(-1)^{n+1} \frac{\beta_3}{2\nu} = (-1)^{n+l+1} \frac{\binom{2n}{n-l}\, l\,[l^2(4n-5) - (3n^2-5n+1)]}{\binom{4n-6}{2n-3}\, 6\,n\,(4n-5)}.$$

Jetzt läßt sich der verbesserte Wert von y_l angeben:

$$\eta_l = y_l + (-1)^{n+l+1} \frac{\binom{2n}{n-l}}{12 \binom{4n-8}{2n-4}} \left[\begin{aligned} &[l^4(4n-3)(4n-5) - l^2(4n-3)(6n^2-8n+1) + 3n^2(n-1)^2] \frac{\Delta_0^{2n-4}}{n(2n-1)} \\ &+ [l^4(4n-3)(4n-7) - l^2(24n^3-68n^2+47n-6) + 3n^2(n-1)(n-2)] \frac{\Delta_0^{2n-2}}{n(4n-7)} \\ &+ [l^4(4n-5)(4n-7) - l^2(4n-5)(6n^2-14n+5) + 3n(n-1)^2(n-2)] \frac{\Delta_0^{2n}}{2(4n-5)(4n-7)} \\ &+ l\,[l^2(4n-3) - n(3n-2)] \frac{(2n-3)\,\overline{\Delta_0^{2n-2}}}{n(n-1)(4n-7)} \\ &+ l\,[l^2(4n-5) - (3n^2-5n+1)] \frac{(2n-3)\,\overline{\Delta_0^{2n}}}{n(4n-5)(4n-7)} \end{aligned} \right]$$

Faktoren von Δ_0^{2n-4}.

Ordnung der Parabel	Korrektur der Randordinaten							Hauptwerte
	y_{-7}	y_{-6}	y_{-5}	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
1					$-\frac{5}{2}\Delta_0^2$	0	$+\frac{3}{2}\Delta_0^2$	$+2\Delta_0^2$
3				$-\Delta_0^4$	$+\frac{3}{2}\Delta_0^4$	$+\frac{11}{14}\Delta_0^4$	$-\frac{9}{14}\Delta_0^4$	$-\frac{9}{7}\Delta_0^4$
5			$-\frac{5}{22}\Delta_0^6$	$+\frac{8}{11}\Delta_0^6$	$-\frac{29}{66}\Delta_0^6$	$-\frac{6}{11}\Delta_0^6$	$+\frac{2}{11}\Delta_0^6$	$+\frac{20}{33}\Delta_0^6$
7		$-\frac{1}{26}\Delta_0^8$	$+\frac{5}{26}\Delta_0^8$	$-\frac{89}{286}\Delta_0^8$	$+\frac{19}{286}\Delta_0^8$	$+\frac{71}{286}\Delta_0^8$	$-\frac{5}{143}\Delta_0^8$	$-\frac{35}{143}\Delta_0^8$
9	$-\frac{7}{1292}\Delta_0^{10}$	$+\frac{12}{323}\Delta_0^{10}$	$-\frac{1631}{16796}\Delta_0^{10}$	$+\frac{431}{4199}\Delta_0^{10}$	$+\frac{159}{16796}\Delta_0^{10}$	$-\frac{392}{4199}\Delta_0^{10}$	$+\frac{27}{16796}\Delta_0^{10}$	$+\frac{378}{4199}\Delta_0^{10}$

Faktoren von Δ_0^{2n-2}.

Ordnung der Parabel	Korrektur der Randordinaten							Hauptwerte
	y_{-7}	y_{-6}	y_{-5}	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
1					$-2\Delta_0^4$	$+\frac{1}{2}\Delta_0^4$	$+\Delta_0^4$	$+\Delta_0^4$
3				$-\frac{2}{3}\Delta_0^6$	$+\frac{13}{12}\Delta_0^6$	$+\frac{1}{3}\Delta_0^6$	$-\frac{5}{12}\Delta_0^6$	$-\frac{2}{3}\Delta_0^6$
5			$-\frac{20}{143}\Delta_0^8$	$+\frac{131}{286}\Delta_0^8$	$-\frac{45}{143}\Delta_0^8$	$-\frac{40}{143}\Delta_0^8$	$+\frac{17}{143}\Delta_0^8$	$+\frac{45}{143}\Delta_0^8$
7		$-\frac{5}{221}\Delta_0^{10}$	$+\frac{101}{884}\Delta_0^{10}$	$-\frac{42}{221}\Delta_0^{10}$	$+\frac{49}{884}\Delta_0^{10}$	$+\frac{29}{221}\Delta_0^{10}$	$-\frac{11}{442}\Delta_0^{10}$	$-\frac{28}{221}\Delta_0^{10}$
9	$-\frac{1}{323}\Delta_0^{12}$	$+\frac{193}{9044}\Delta_0^{12}$	$-\frac{15}{226}\Delta_0^{12}$	$+\frac{279}{4522}\Delta_0^{12}$	$+\frac{1}{4522}\Delta_0^{12}$	$-\frac{449}{9044}\Delta_0^{12}$	$+\frac{6}{2261}\Delta_0^{12}$	$+\frac{15}{323}\Delta_0^{12}$

Faktoren von Δ_0^{2n}.

Ordnung der Parabel	Korrektur der Randordinaten							Hauptwerte
	y_{-7}	y_{-6}	y_{-5}	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
1					$-\frac{5}{14}\Delta_0^6$	$+\frac{1}{7}\Delta_0^6$	$+\frac{1}{7}\Delta_0^6$	$+\frac{1}{7}\Delta_0^6$
3				$-\frac{7}{66}\Delta_0^8$	$+\frac{2}{11}\Delta_0^8$	$+\frac{1}{33}\Delta_0^8$	$-\frac{2}{33}\Delta_0^8$	$-\frac{1}{11}\Delta_0^8$
5			$-\frac{3}{143}\Delta_0^{10}$	$+\frac{10}{143}\Delta_0^{10}$	$-\frac{15}{286}\Delta_0^{10}$	$-\frac{5}{143}\Delta_0^{10}$	$+\frac{5}{286}\Delta_0^{10}$	$+\frac{6}{143}\Delta_0^{10}$
7		$-\frac{55}{16796}\Delta_0^{12}$	$+\frac{70}{4199}\Delta_0^{12}$	$-\frac{7}{247}\Delta_0^{12}$	$+\frac{42}{4199}\Delta_0^{12}$	$+\frac{287}{16796}\Delta_0^{12}$	$-\frac{16}{4199}\Delta_0^{12}$	$-\frac{70}{4199}\Delta_0^{12}$
9	$-\frac{13}{29716}\Delta_0^{14}$	$+\frac{45}{14858}\Delta_0^{14}$	$-\frac{60}{7429}\Delta_0^{14}$	$+\frac{135}{14858}\Delta_0^{14}$	$-\frac{9}{14858}\Delta_0^{14}$	$-\frac{97}{14858}\Delta_0^{14}$	$+\frac{15}{29716}\Delta_0^{14}$	$+\frac{45}{7429}\Delta_0^{14}$

Faktoren von $\overline{\Delta_0^{2n-2}}$.

Ordnung der Parabel	Korrektur der Randordinaten							Hauptwerte
	y_{-7}	y_{-6}	y_{-5}	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
1					$-\frac{1}{4}\overline{\Delta_0^{4}}$	$+\frac{1}{4}\overline{\Delta_0^{4}}$	$+\frac{1}{4}\overline{\Delta_0^{4}}$	—
3				$-\frac{1}{27}\overline{\Delta_0^{6}}$	$+\frac{11}{108}\overline{\Delta_0^{6}}$	$-\frac{1}{27}\overline{\Delta_0^{6}}$	$-\frac{1}{12}\overline{\Delta_0^{6}}$	—
5			$-\frac{5}{1144}\overline{\Delta_0^{8}}$	$+\frac{23}{1144}\overline{\Delta_0^{8}}$	$-\frac{3}{104}\overline{\Delta_0^{8}}$	$-\frac{1}{572}\overline{\Delta_0^{8}}$	$+\frac{7}{286}\overline{\Delta_0^{8}}$	—
7		$-\frac{1}{2210}\overline{\Delta_0^{10}}$	$+\frac{1}{340}\overline{\Delta_0^{10}}$	$-\frac{8}{1105}\overline{\Delta_0^{10}}$	$+\frac{81}{4420}\overline{\Delta_0^{10}}$	$+\frac{3}{2210}\overline{\Delta_0^{10}}$	$-\frac{3}{442}\overline{\Delta_0^{10}}$	—
9	$-\frac{1}{23256}\overline{\Delta_0^{12}}$	$+\frac{59}{162792}\overline{\Delta_0^{12}}$	$-\frac{205}{162792}\overline{\Delta_0^{2}}$	$+\frac{89}{40698}\overline{\Delta_0^{12}}$	$-\frac{253}{162792}\overline{\Delta_0^{12}}$	$-\frac{121}{162792}\overline{\Delta_0^{12}}$	$+\frac{33}{18088}\overline{\Delta_0^{12}}$	—

Faktoren von $\overline{\Delta_0^{2n}}$.

Ordnung der Parabel	Korrektur der Randordinaten							Hauptwerte
	y_{-7}	y_{-6}	y_{-5}	y_{-4}	y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0
1					$-\frac{5}{84}\overline{\Delta_0^{6}}$	$+\frac{1}{14}\overline{\Delta_0^{6}}$	$+\frac{1}{78}\overline{\Delta_0^{6}}$	—
3				$-\frac{7}{792}\overline{\Delta_0^{8}}$	$+\frac{5}{198}\overline{\Delta_0^{8}}$	$-\frac{5}{396}\overline{\Delta_0^{8}}$	$-\frac{1}{66}\overline{\Delta_0^{8}}$	—
5			$-\frac{3}{2860}\overline{\Delta_0^{10}}$	$+\frac{7}{1430}\overline{\Delta_0^{10}}$	$-\frac{21}{2860}\overline{\Delta_0^{10}}$	$+\frac{1}{715}\overline{\Delta_0^{10}}$	$+\frac{7}{1430}\overline{\Delta_0^{10}}$	—
7		$-\frac{11}{100776}\overline{\Delta_0^{12}}$	$+\frac{3}{4199}\overline{\Delta_0^{12}}$	$-\frac{15}{8398}\overline{\Delta_0^{12}}$	$+\frac{23}{12597}\overline{\Delta_0^{12}}$	$+\frac{3}{33592}\overline{\Delta_0^{12}}$	$-\frac{6}{4199}\overline{\Delta_0^{12}}$	—
9	$-\frac{13}{1248072}\overline{\Delta_0^{14}}$	$+\frac{55}{624036}\overline{\Delta_0^{14}}$	$-\frac{55}{178296}\overline{\Delta_0^{14}}$	$+\frac{5}{9177}\overline{\Delta_0^{14}}$	$-\frac{517}{1248072}\overline{\Delta_0^{14}}$	$-\frac{11}{89148}\overline{\Delta_0^{14}}$	$+\frac{165}{416024}\overline{\Delta_0^{14}}$	—

Für die Summe der Quadrate der Abweichungen findet man in diesem Falle

$$
\begin{aligned}
\Sigma \varepsilon^2 = \Big[& \frac{4(4n-3)^2(4n-5)^2(4n-7)}{2n-1}\left(\overline{\Delta_0^{2n-4}}\right)^2 + 2(4n-3)(4n-5)(16n^2-28n+9)\left(\overline{\Delta_0^{2n-2}}\right)^2 \\
& + (4n-3)(2n-1)(n-1)\,n\left(\overline{\Delta_0^{2n}}\right)^2 + 8(4n-3)^2(4n-5)(4n-7)\,\overline{\Delta_0^{2n-4}}\cdot\overline{\Delta_0^{2n-2}} \\
& + 4(4n-3)(4n-5)(4n-7)\cdot n\,\overline{\Delta_0^{2n-4}}\cdot\overline{\Delta_0^{2n}} + 4(4n-3)(4n-5)(2n-2)\cdot n\,\overline{\Delta_0^{2n-2}}\cdot\overline{\Delta_0^{2n}}\Big] : 3\binom{4n-2}{2n-1} \\
& + \left[\frac{(4n-3)(4n-5)(2n-1)}{(n-1)^2}\left(\overline{\Delta_0^{2n-2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{(2n-1)^2}{n}\left(\overline{\Delta_0^{2n}}\right)^2 + 2\,\frac{(2n-1)(4n-5)}{n-1}\,\overline{\Delta_0^{2n-2}}\;\overline{\Delta_0^{2n}}\right] : 3\binom{4n-4}{2n-2}.
\end{aligned}
$$

Freiberg (Sa.), Februar 1929. 983

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Über einige neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Elastizitätslehre.

Von **I. MALKIN** in Berlin-Charlottenburg.

Gegenüber einem früheren in dieser Zeitschrift erschienenen gleichartigen Bericht[1]) unterscheidet sich der vorliegende wesentlich dadurch, daß er in erheblichem Maße auf allgemeine Methoden zur Lösung des elastischen Problems im Sinne der mathematischen Elastizitätstheorie eingeht. Der Inhalt des elastischen Problems läßt sich bekanntlich folgenderweise formulieren[2]). Ein elastischer Körper K mit der Oberfläche O weist im deformierten Zustand gegenüber der spannungslosen Gestalt bestimmte Verschiebungen auf, deren Komponenten nach den Koordinatenrichtungen genommen mit u, v, w bezeichnet werden mögen. Durch diese Größen ist eine Reihe abgeleiteter Funktionen festgelegt. Führen wir zunächst mit

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x_x,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=y_y,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=z_z,\quad \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=y_z,\quad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=x_z,\quad \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=x_y \qquad (1)$$

die Komponenten (bezw. doppelten Komponenten) des Deformationstensors, mit

$$x_x+y_y+z_z=\sigma=\operatorname{div}(u,v,w) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

die Volumendilatation, und dann unter Hinzunahme der elastischen Konstanten λ und μ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\lambda\sigma-2\mu x_x&=X_x & \qquad -\mu y_z&=Y_z \\ -\lambda\sigma-2\mu y_y&=Y_y & \qquad -\mu z_x&=Z_x \\ -\lambda\sigma-2\mu z_z&=Z_z & \qquad -\mu x_y&=X_y \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

die Komponenten des Spannungstensors ein, so verlangt das elastische Problem: die drei Funktionen u, v, w, von x, y, z so zu bestimmen, daß im Innern von K die Bedingungen

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0 \qquad (4)$$

erfüllt werden, während sich auf O entweder vorgeschriebene Werte der Verschiebung oder verlangte Spannungswerte

$$\left.\begin{aligned} X_\nu&=X_x\cos(\nu x)+X_y\cos(\nu y)+X_z\cos(\nu z)\\ Y_\nu&=Y_x\cos(\nu x)+Y_y\cos(\nu y)+Y_z\cos(\nu z)\\ Z_\nu&=Z_x\cos(\nu x)+Z_y\cos(\nu z)+Z_z\cos(\nu z)\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

worin ν die Flächennormale in O bezeichnet, ergeben, oder endlich kompliziertere Randbedingungen befriedigt werden.

Die ersten zwei Abschnitte des nachstehend folgenden Berichtes sind im Wesentlichen der Frage einer erfolgreichen Behandlung dieses Problems im Raum und in der Ebene gewidmet, während sich der dritte Abschnitt auf eine Spezialaufgabe der Elastizitätstheorie bezieht.

1. Zur Lösung des elastischen Problems in allgemeinster Form. Mit den Gl. (1), (2) und (3) geht das System (4) in ein sehr schwieriges partielles Differentialsystem 2. Ordnung für die drei Funktionen u, v, w von x, y, z mit den etwa durch das System (5) gegebenen Randbedingungen über. Die neuere Entwicklung der Analysis erlaubt es, auf dem Wege zur allgemeinen Lösung dieses Problems einen wesentlichen Schritt vorwärts zu kommen, und zwar geschieht dies unter Zuhilfenahme der in der mathematischen Physik sehr gebräuchlichen Methode der Partikularlösungen. Dieses Verfahren liegt der in den Mathematischen Annalen von St. Bergmann veröffentlichten Arbeit zugrunde[3]).

[1]) Siehe diese Zeitschrift Bd. 1 (1921), S 466.

[2]) Siehe z. B. Planck, Mech. def. Körp., oder Love, Elastizität.

[3]) Ueber die Bestimmung der elastischen Spannungen und Verschiebungen in einem konvexen Körper, Math. Ann. Bd. 98 (1927), S. 248 ff.

Gewisse Partikularlösungen des elastischen Problems sind an sich bekannt; man stößt auf diese Lösungen beim Studium der Kugelfunktionen. Mit Rücksicht auf die Leser, die mit der Theorie dieser Funktionen nicht vertraut sind, wollen wir auf das System der bezeichneten Partikularlösungen etwas ausführlicher eingehen. Die räumliche Potentialgleichung $\Delta u \equiv \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2 = 0$ wird durch den Ausdruck[1])

$$Y_n(R, \cos\vartheta, \varphi) = A_{n0} R^n P_{n0}(\cos\vartheta) + R^n \sum_{m=1}^{m=n} P_{nm}(\cos\vartheta)\left[A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi\right]$$

befriedigt, worin ϑ, φ die räumlichen Polarkoordinaten des auf der Kugel vom Radius R um den Nullpunkt liegenden Punktes (x, y, z) sind, $P_{nm}(X) = \sqrt{(1-X^2)^m}\, P_n^{(m)}(X)$ mit $m \leqq n$ und

$$\mathrm{P}_n(x) = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n!}\left[X^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}X^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}X^{n-4} + \ldots\right.$$
$$\left. + (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2k+1)X^{n-2k}}{2\,4\ldots 2k(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)} + \ldots\right].$$

Setzt man $n = 0, 1, 2, \ldots$, so wird $Y_0 = A_{00}R^0P_{00}$; $Y_1 = A_{10}RP_{10} + A_{11}RP_{11}\cos\varphi + B_{11}RP_{11}\sin\varphi$; $Y_2 = A_{20}R^2P_{20} + A_{21}R^2P_{21}\cos\varphi + B_{21}R^2P_{21}\sin\varphi + A_{22}R^2P_{22}\cos 2\varphi + B_{22}R^2P_{22}\sin 2\varphi; \ldots$ Für die Multiplikatoren der Größen A und B führen wir nun die folgenden Bezeichnungen ein:

$$1 = \Phi_0;\quad RP_{10} = \Phi_1;\quad RP_{11}\cos\varphi = \Phi_2;\quad RP_{11}\sin\varphi = \Phi_3;\quad R^2P_{20} = \Phi_4;$$
$$R^2P_{21}\cos\varphi = \Phi_5;\quad R^2P_{21}\sin\varphi = \Phi_6;\quad R^2P_{22}\cos 2\varphi = \Phi_7;\quad R^2P_{22}\sin 2\varphi = \Phi_8 \quad \text{usw.}$$

Substituiert man hierin die oben angegebenen Ausdrücke für die Kugelfunktionen P und geht dann zu den kartesischen Koordinaten über, so ergibt sich

$$\Phi_0 = 1;\quad \Phi_1 = x;\quad \Phi_2 = y;\quad \Phi_3 = z;\quad \Phi_4 = x^2 - {}^1/_2\, y^2 - {}^1/_2\, z^2;$$
$$\Phi_5 = 3xy;\quad \Phi_6 = 3xz;\quad \Phi_7 = 3(y^2 - z^2);\quad \Phi_8 = 6yz \quad \text{usw.}$$

Führt man ferner die Konstante $M_s = {}^1/_2(\lambda + \mu) : [(s-1)\lambda + (3s-2)\mu]$ ein, worin s den Grad des entsprechenden Polynomes Φ bezeichnet, so sind die Vektoren, deren Komponenten nach den Koordinatenachsen aus dem Schema

Vektor	x-Komponente	y-Komponente	z-Komponente
$\mathfrak{K}_{r,0,0}$	$-M_s R^2 \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial x^2} + \Phi_r$	$-M_s R^2 \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial x\, \partial y}$	$-M_s R^2 \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial x\, \partial z}$
$\mathfrak{K}_{0,r,0}$	$-M_s R^2 \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial x\, \partial y}$	$-M_s R^2 \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial y^2} + \Phi_r$	$-M_s R^2 \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial y\, \partial z}$
$\mathfrak{K}_{0,0,r}$	$-M_s R^2 \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial x\, \partial z}$	$-M_s R^2 \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial y\, \partial z}$	$-M_s R^2 \frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial z^2} + \Phi_r$

hervorgehen, Lösungen unseres Problems; man überzeugt sich durch eine einfache Rechnung, daß die Komponenten eines jeden dieser drei Vektoren dem oben angegebenen partiellen Differentialsystem (4) genügen. Von der Verwandtschaft ausgehend, die das elastische Problem mit der Potentialaufgabe verknüpft[2]), läßt sich beweisen, daß das Vektorensystem der $\mathfrak{K}$ in (K, O) ein **vollständiges** ist, d. h. daß man jeden im abgeschlossenen Bereich (K, O) regulären Verschiebungsvektor (u, v, w) durch eine endliche Summe der Form $\Sigma a \mathfrak{K}$ mit **gleichmäßiger** Näherung in jedem abgeschlossenen Teilbereich von K darstellen kann.

Bei der Behandlung von Randwertaufgaben mit Hilfe der hier benutzten Methode der Partikularlösungen spielt die Frage der Erfüllung der Randbedingungen eine ausschlaggebende Rolle. Ein wichtiges Hilfsmittel zur Bewältigung dieses Problems bildet die **Orthogonalisierung** einer unendlichen Vektorenfolge, in unserem Falle des Systems der $\mathfrak{K}$. Von diesem Verfahren machen wir Gebrauch wie folgt. Bezeichnet man mit

[1]) Vgl. z. B. Korn, Potentialtheorie, Bd. 1 (1899), S. 136.

[2]) E. Almansi, sull' integrazione dell' equazione differenziale $\Delta^{2n} = 0$, Ann. di Mat. pura ed applicata, (3) 2 (1899).

$\{\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}\}$, worin $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ Verschiebungsvektoren sind, das über O genommene Oberflächenintegral über das innere Produkt des Vektors $\mathfrak{q}$ mit dem dem Vektor $\mathfrak{r}$ entsprechenden Spannungsvektor, so sei dem System der $\mathfrak{K}$ ein diesem sonst gleichwertiges System derart aufeinander orthogonaler Vektoren $\mathfrak{Z}$ zugeordnet, daß unter Zuhilfenahme des eben eingeführten Symbols

$$\left\{\mathfrak{Z}_{r,r',r''}\ \mathfrak{Z}_{\varrho,\varrho',\varrho''}\right\} \begin{array}{l} = 1, \text{ falls } r = \varrho,\quad r' = \varrho',\quad r'' = \varrho'' \\ = 0, \text{ falls } r \neq \varrho \text{ oder } r' \neq \varrho' \text{ oder } r'' \neq \varrho'' \end{array} \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

wobei r, r', r'' bzw. $\varrho, \varrho', \varrho''$ die Wertetripel $1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1;\ 2, 0, 0;\ 0, 2, 0;\ \ldots$ durchlaufen. Das hierdurch festgelegte System der $\mathfrak{Z}$ ist definiert durch die Formel

$$\mathfrak{Z}_{r,r',r''} = \sum_{(\varrho,\varrho',\varrho'')=(1,0,0)}^{(\varrho,\varrho',\varrho'')=(r,r',r'')} \gamma_{\varrho,\varrho',\varrho''}^{(r,r',r'')}\ \mathfrak{K}_{\varrho,\varrho',\varrho''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

worin

$$\gamma_{r,r',r''}^{(\varrho,\varrho',\varrho'')} = (-1)^{k_\varrho k_r - 1} \times$$

$$\times \frac{\begin{vmatrix} \{\mathfrak{K}_{1,0,0}\ \mathfrak{K}_{1,0,0}\} & \{\mathfrak{K}_{0,1,0}\ \mathfrak{K}_{1,0,0}\} & \ldots & \{\mathfrak{K}_{r^0,r^{00},r^{000}}\ \mathfrak{K}_{1,0,0}\} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \{\mathfrak{K}_{1,0,0}\ \mathfrak{K}_{\varrho^0,\varrho^{00},\varrho^{000}}\} & \{\mathfrak{K}_{0,1,0}\ \mathfrak{K}_{\varrho^0,\varrho^{00},\varrho^{000}}\} & \ldots & \{\mathfrak{K}_{r^0,r^{00},r^{000}}\ \mathfrak{K}_{\varrho^0,\varrho^{00},\varrho^{000}}\} \\ \{\mathfrak{K}_{1,0,0}\ \mathfrak{K}_{\varrho^*,\varrho^{**},\varrho^{***}}\} & \{\mathfrak{K}_{0,1,0}\ \mathfrak{K}_{\varrho^*,\varrho^{**},\varrho^{***}}\} & \ldots & \{\mathfrak{K}_{r^0,r^{00},r^{000}}\ \mathfrak{K}_{\varrho^*,\varrho^{**},\varrho^{***}}\} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \{\mathfrak{K}_{1,0,0}\ \mathfrak{K}_{r,r',r''}\} & \{\mathfrak{K}_{0,1,0}\ \mathfrak{K}_{r,r',r''}\} & \ldots & \{\mathfrak{K}_{r^0,r^{00},r^{000}}\ \mathfrak{K}_{r,r',r''}\} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \{\mathfrak{K}_{1,0,0}\ \mathfrak{K}_{1,0,0}\} & \ldots & \{\mathfrak{K}_{r^0,r^{00},r^{000}}\ \mathfrak{K}_{1,0,0}\} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \{\mathfrak{K}_{1,0,0}\ \mathfrak{K}_{r^0,r^{00},r^{000}}\} & \ldots & \{\mathfrak{K}_{r^0,r^{00},r^{000}}\ \mathfrak{K}_{r^0,r^{00},r^{000}}\} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \{\mathfrak{K}_{1,0,0}\ \mathfrak{K}_{1,0,0}\} & \ldots & \{\mathfrak{K}_{r,r',r''}\ \mathfrak{K}_{1,0,0}\} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \{\mathfrak{K}_{1,0,0}\ \mathfrak{K}_{r,r',r''}\} & \ldots & \{\mathfrak{K}_{r,r',r''}\ \mathfrak{K}_{r,r',r''}\} \end{vmatrix}}}$$

Hierin wird mit r^0, r^{00}, r^{000} dasjenige Tripel bezeichnet, das in unserer Reihenfolge dem Tripel r, r', r'' unmittelbar vorangeht, mit r^*, r^{**}, r^{***} dasjenige, das ihm unmittelbar folgt, während die Zahl k_ϱ bzw. k_r die Stelle des Tripels $\varrho, \varrho', \varrho''$ (bzw. r, r', r'') in der erwähnten Reihenfolge angibt. Die Orthogonalvektoren $\mathfrak{Z}$ sind wiederum Partikularlösungen des elastischen Problems und ihre Gesamtheit bildet ein in (K, O) gleichfalls vollständiges System. Gegenüber dem System der $\mathfrak{K}$ bietet das System der $\mathfrak{Z}$ eben den Vorteil einer bequemen Anpassung an die Randbedingungen. Setzt man nämlich die Reihenentwicklung $\mathfrak{q} = \Sigma a_{r,r',r''}\ \mathfrak{Z}_{r,r',r''}$ an und führt hieran unter Beziehung auf die oben gekennzeichnete Verwendung der geschweiften Klammern beiderseits die Rechenoperationen $\{\mathfrak{Z}_{r,r',r''}\ \mathfrak{q}\}$ aus, so erhält man mit den obigen Beziehungen (6) die Koeffizienten $a_{r,r',r''}$ und dies führt zu der Darstellung

$$\mathfrak{q} = \sum_{(r,r',r'')=1}^{(r,r',r'')=\infty} \mathfrak{Z}_{r,r',r''} \iint_0 [\mathfrak{Z}_{r,r',r''}\ \mathfrak{A}]\, d\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

wenn man mit $\mathfrak{A}$ den dem Verschiebungsvektor $\mathfrak{q}$ entsprechenden Spannungsvektor, mit $d\omega$ ein Element von O bezeichnet. Der Herleitung der Reihendarstellung (8) liegt die Voraussetzung zugrunde, daß der Reihenansatz für $\mathfrak{q}$ in (K, O) gleichmäßig konvergiert, da sonst die mit dem Symbol $\{\ \}$ bezeichneten infinitesimalen Operationen nicht zulässig sind. Der Konvergenzbeweis für die Reihe (8) in einem inneren Punkte von (K, O) bildet, rein mathematisch betrachtet, den zentralen Teil der Bergmannschen Arbeit. Aus ihm ergibt sich leicht auch die gleichmäßige Konvergenz in jedem ganz im Innern von K liegenden Teilbereich. Und nun folgt der letzte formale Schritt, nämlich die Transformation des Ausdruckes (8) auf das System der Vektoren $\mathfrak{K}$. Mit (7) wird

$$\iint_0 [\mathfrak{Z}_{r,r',r''}\ \mathfrak{A}]\, d\omega = \{\mathfrak{Z}_{r,r',r''}\ \mathfrak{q}\} = \sum_{(\varrho,\varrho',\varrho'')=(1,0,0)}^{(\varrho,\varrho',\varrho'')=(r,r',r'')} \gamma_{\varrho,\varrho',\varrho''}^{(r,r',r'')}\ \{\mathfrak{K}_{\varrho,\varrho',\varrho''}\ \mathfrak{q}\}.$$

Setzt man dies und die Reihe (7) in die Reihe (8) ein, ordnet sie nach den Funktionen $\mathfrak{K}$ und geht dann zur Grenze für lim $m = \infty$ über, so erhält man die gesuchte Darstellung

$$\mathfrak{q} = -\lim_{(m \to \infty)} \left(\sum_{(r,r',r'')=(1,0,0)}^{(r,r',r'')=(m,m',m'')} \mathfrak{K}_{r,r',r''} \iint_0 \left[\mathfrak{T}_{r,r',r''}^{(m,m',m'')}\ \mathfrak{A}\right] d\omega \right),$$

worin

$$\mathfrak{T}^{(m,m',m'')}_{r,r',r''} = \left(\sum_{(\rho,\rho',\rho'')=(r,r',r'')}^{(m,m',m'')} \gamma^{(\rho,\rho',\rho'')}_{r,r',r''} \gamma^{(\rho,\rho',\rho'')}_{1,0,0} \right) \mathfrak{K}_{1,0,0} + \left(\sum_{(\rho,\rho',\rho'')=(r,r',r'')}^{(m,m',m'')} \gamma^{(\rho,\rho',\rho'')}_{r,r',r''} \gamma^{(\rho,\rho',\rho'')}_{0,1,0} \right) \mathfrak{K}_{0,1,0}$$
$$+ \left(\sum_{(\rho,\rho',\rho'')=(r,r',r'')}^{(m,m',m'')} \gamma^{(\rho,\rho',\rho'')}_{r,r',r''} \gamma^{(\rho,\rho',\rho'')}_{0,0,1} \right) \mathfrak{K}_{0,0,1} + \ldots + \left(\sum_{(\rho,\rho',\rho'')=(r,r',r'')}^{(m,m',m'')} \gamma^{(\rho,\rho',\rho'')}_{r,r',r''} \gamma^{(\rho,\rho',\rho'')}_{r,r',r''} \right) \mathfrak{K}_{r,r',r''}$$
$$+ \left(\sum_{(\rho,\rho',\rho'')=(r^*,r^{**},r^{***})}^{(m,m',m'')} \gamma^{(\rho,\rho',\rho'')}_{r,r',r''} \gamma^{(\rho,\rho',\rho'')}_{r^*,r^{**},r^{***}} \right) \mathfrak{K}_{r^*,r^{**},r^{***}} + \ldots +$$
$$+ \left(\sum_{(\rho,\rho',\rho'')=(m^0,m^{00},m^{000})}^{(m,m',m'')} \gamma^{(\rho,\rho',\rho'')}_{r,r',r''} \gamma^{(\rho,\rho',\rho'')}_{m^0,m^{00},m^{000}} \right) \mathfrak{K}_{m^0,m^{00},m^{000}} + \left(\gamma^{(m,m',m'')}_{r,r',r''} \gamma^{(m,m',m'')}_{m,m',m''} \right) \mathfrak{K}_{m,m',m''}.$$

Die beiden letzten Formeln liefern die Lösung des Problems. Als besondere Vorteile dieser Lösung sind folgende Punkte hervorzuheben. Erstens gibt sie ein explizite ausgedrücktes Verfahren zur Berechnung der verlangten Größen, womit die Möglichkeit der Erlangung praktisch verwertbarer Resultate in greifbare Nähe rückt. Zweitens sind die zur Anwendung kommenden Funktionen sehr weitgehend tabuliert worden, womit die Möglichkeit einer rechnungsmäßigen Beherrschung des Problems weiter unterstützt wird. Drittens haben wir es hier mit einer Folge von Approximationen zu tun, deren charakteristisches Kennzeichen darin besteht, daß jede Näherung in dieser Folge eine Lösung ist; dieser Umstand ist aus dem Grunde sehr wichtig, weil die Randbedingungen bei elastischen Problemen der Praxis nicht immer exakt gegeben bzw. bekannt sind, so daß die gesuchte Lösung sehr wohl unter den Näherungen enthalten sein kann. Hierin liegt ein sehr vorteilhafter Unterschied gegenüber dem Ritzschen Verfahren, bei dem die Näherungen zwar den Randbedingungen genau entsprechen, aber die Bedingungen im Innern nicht genau erfüllen.

Zu bemerken wäre noch, daß der dem Verfahren zugrunde liegende Satz von Bergmann über die Approximation räumlicher Potentialfunktionen durch harmonische Polynome, zunächst gültig nur für konvexe Körper, kürzlich auf den Fall von nicht konvexen Körpern verallgemeinert worden ist[1]. Diese Verallgemeinerung kommt selbstverständlich auch dem oben dargelegten Verfahren zugute.

Dieses Verfahren erfährt naturgemäß eine beträchtliche Vereinfachung, wenn die Verschiebungskomponenten von einem Potential ableitbar sind, das selbst biharmonisch ist. Dann genügt es, eine Entwicklung der oben dargestellten Art für das Verschiebungspotential anzugeben. In dieser Weise lassen sich zwei wichtige Spezialfälle des elastischen Problems behandeln, der kreissymmetrisch belastete Rotationskörper und eine zu ihrer Mittelebene senkrecht belastete dünne Platte. Bezüglich der näheren Durchführung sei auf die Originalarbeit verwiesen.

Eine Reihe sehr interessanter Beiträge zum dreidimensionalen elastischen Problem verdankt man P. Burgatti. Zunächst sei hier über das folgende von ihm behandelte Problem berichtet. Ist der Vektor $\mathfrak{K}$ die gesamte Spannung an einem zum Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ normalen Flächenelement in einem nur der Wirkung von Oberflächenkräften unterworfenen elastischen Körper, so möge dort die Differentialgleichung $\Delta \mathfrak{K} =$ konst. gelten, und es wird nach der allgemeinsten damit verträglichen Verschiebung (u, v, w) gefragt[2]. Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet das von Beltrami herrührende Gleichungssystem[3])

$$\Delta X_x = \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \qquad \Delta Y_z = \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z}$$

mit entsprechenden Beziehungen für die anderen Komponenten des Spannungstensors, wobei Θ die Invariante $X_x + Y_y + Z_z$ bedeutet. Ordnet man den Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ der z-Achse zu, was die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beeinträchtigt, so kann die

[1]) I. L. Walsh, The approximation of harmonic functions by harmonic polynomials and by harmonic rational functions, Bulletin of the American Mathematical Society, Juli bis August 1929.

[2]) P. Burgatti, Sopra una soluzione molto generale dell' equazioni dell' equilibrio elastico, Rend. R. Acc. di Bologna 1923.

[3]) Siehe Love-Timpe, Theorie der Elastizität, 1907, S. 159, Gl. (30) und (31), S. 160 und 161. Vorzeichendifferenzen erklären sich durch Definitionsverschiedenheit.

obige Voraussetzung in der Form $\Delta (X_z \mathfrak{i} + Y_z \mathfrak{j} + Z_z \mathfrak{k}) = \text{konst.}$ geschrieben werden, was mit dem Gleichungssystem $\Delta X_z = \text{konst.}$, $\Delta Y_z = \text{konst.}$, $\Delta Z_z = \text{konst.}$ gleichbedeutend ist. Mit den obigen Beltramischen Gleichungen führt dies auf

$$\Theta = (a x + b y + c) z + {}^1/_2\, m z^2 + f(x, y),$$

worin a, b, c, m Konstanten sind und f eine noch willkürliche Funktion bedeutet. Nun folgt aber aus unseren Gl. (3)

$$\operatorname{div} (u, v, w) = - \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \Theta .$$

Setzt man hierin den für Θ gefundenen Ausdruck ein und bedenkt, daß $\operatorname{div}(u, v, w)$ stets harmonisch ist[1]), so sieht man, daß auch die Funktion $f(x, y)$ der Forderung

$$\Delta [f(x, y) + {}^1/_4\, m (x^2 + y^2)] = 0$$

genügen muß. Die in der eckigen Klammer stehende Funktion werde mit $f_2(x, y)$ bezeichnet, die zu ihr konjugierte Potentialfunktion mit $f_1(x, y)$, so daß also zwischen f_1 und f_2 die bekannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen bestehen, wonach f_1 bis auf eine Konstante bestimmt ist, wenn f_2 gegeben ist. Damit ergibt sich

$$\operatorname{grad} f(x, y) = - \operatorname{rot} (f_1 \mathfrak{k}) - {}^1/_2\, m (x \mathfrak{i} + y \mathfrak{j}).$$

Die Gleichungen des elastischen Gleichgewichts lassen sich bekanntlich in der Form

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} (u, v, w) - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} (u, v, w) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

schreiben[2]). Hierin setze man für $\operatorname{div}(u, v, w)$, Θ und $\operatorname{grad} f(x, y)$ die oben angeschriebenen Ausdrücke ein. Eine elementare Integration führt dann auf

$$\operatorname{rot} (u, v, w) = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu (3\lambda + 2\mu)} \{ f_1 \mathfrak{k} - {}^1/_2 [b (z^2 - y^2) - y (m z + c)] \mathfrak{i}$$
$$- {}^1/_2 [a (x^2 - z^2) + x (m z + c)] \mathfrak{j} + \operatorname{grad} \chi_1 \},$$

worin χ_1 eine willkürliche harmonische Funktion ist. Schreibt man nun den Inhalt der geschweiften Klammer in der letzten Gleichung in der Gestalt $f_1 \mathfrak{k} - \mathfrak{v} + \operatorname{grad} \chi_1$, setzt man ferner

$${}^1/_2 \left\{ (a x + b y) z^2 - (m z + c) \frac{x^2 + y^2}{2} - {}^1/_3 (a x^3 + b y^3) \right\} + Z = \varphi,$$

worin Z eine Funktion von z allein ist, definiert man endlich den Vektor $\mathfrak{u} = u_1(x, y) \mathfrak{i} + u_2(x, y) \mathfrak{j}$ durch die Differentialgleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{u} = f_1 \mathfrak{k} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{u} = f_2 ,$$

so läßt sich die Gleichung für $\operatorname{rot}(u, v, w)$ mit

$$\mathfrak{w} = u \mathfrak{i} + v \mathfrak{j} + w \mathfrak{k} - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu (3\lambda + 2\mu)} (\mathfrak{u} - \varphi \mathfrak{k})$$

in der Gestalt $\operatorname{rot} \mathfrak{w} = \operatorname{grad} \chi$

schreiben, wenn man $(\lambda + 2\mu) \chi_1 = \mu (3\lambda + 2\mu) \chi$ setzt.

Mit dem obigen Wert für die $\operatorname{div}(u, v, w)$ erhält man jetzt

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} = - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu (3\lambda + 2\mu)} \left[\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} f(x, y) + \frac{m}{2} (x^2 + y^2) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (a x + b y) z - Z' \right].$$

Setzt man endlich

$$\mathfrak{w} = \operatorname{grad} \psi + \operatorname{rot} \mathfrak{t} = \operatorname{grad} \psi + \mathfrak{w}_1, \quad \operatorname{div} \mathfrak{w}_1 = 0,$$

so ergibt sich aus den Ausdrücken für $\operatorname{div} \mathfrak{w}$ und $\operatorname{rot} \mathfrak{w}$

$$\Delta \psi = - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu (3\lambda + 2\mu)} \left[\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} f(x, y) + \frac{m}{2} (x^2 + y^2) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (a x + b y) z - Z' \right]$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{t} = \operatorname{grad} \chi .$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß der Vektor $\mathfrak{w}_1$ harmonisch sein muß, da χ eine willkürliche harmonische Funktion ist. Damit folgt für die gesuchte Verschiebung

$$u \mathfrak{i} + v \mathfrak{j} + w \mathfrak{k} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu (3\lambda + 2\mu)} (\mathfrak{u} - \varphi \mathfrak{k}) + \operatorname{grad} \psi + \mathfrak{w}_1 ,$$

[1]) Siehe Love-Timpe, l. c. § 92.

[2]) Siehe Love-Timpe, l. c. S. 158, Gl. (21). Hierbei ist zu beachten, daß Love $\operatorname{rot}_x (u, v, w) = {}^1/_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$ usw. schreibt, während in unserer Schreibweise der Faktor ${}^1/_2$ fortfällt. Vgl. hierzu übrigens M. Planck l. c. § 13.

worin ψ durch die Gleichung für $\Delta\psi$ definiert ist. Damit ist eine Formel erhalten, die in Spezialfällen auf die Lösung wichtiger Aufgaben führt. Als Beispiel führt Burgatti die Herleitung der allgemeinsten Saint-Venantschen Deformation aus seiner Formel an, worauf wir hier jedoch nicht weiter eingehen wollen.

Wie bereits aus den obigen Ausführungen zur Bergmannschen Arbeit hervorgehen dürfte, macht die Erfüllung der Randbedingungen beim elastischen Problem, wie ja bei jedem Randwertproblem, die Hauptschwierigkeiten der Aufgabe aus, während die für das Innere des Körpers geltenden Differentialgleichungen verhältnismäßig leicht lösbar sind. Da diese Gleichungen an die gesuchten Funktionen sehr allgemeine Forderungen stellen, so kann man der Lösung sehr verschiedenartige Gestalt geben, und es ist ohne weiteres klar, daß man hierin häufig eine Handhabe zur erfolgreichen Behandlung der Randbedingungen haben wird. Eine sehr elegante und einfach gestaltete allgemeine Lösung des elastischen Problems gibt Burgatti in einem Akademiebericht von 1926[1]) an, der folgenden Inhalt hat.

Bezeichnet man wiederum mit $\mathfrak{k}$ den Einheitsvektor der z-Achse, setzt man in (9) die Koeffizienten $\lambda + 2\mu$ und μ gleich b^2 bzw. a^2, definiert man ferner die harmonische Funktion φ durch die Gleichung $\operatorname{div}(u, v, w) = a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, so geht (9) über in $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(u,v,w) = \operatorname{rot}[b^2 \operatorname{grad}\varphi, \mathfrak{k}]$, woraus

$$\operatorname{rot}(u, v, w) = b^2 [\operatorname{grad}\varphi, \mathfrak{k}] + \operatorname{grad} f$$

folgt, wenn man auch mit f eine harmonische Funktion bezeichnet. Nun gilt aber einerseits $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \operatorname{div}(\varphi\,\mathfrak{k})$ und andererseits $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \operatorname{div}(z \operatorname{grad}\varphi)$, also kann man schreiben

$$\operatorname{div}(u, v, w) = a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \operatorname{div}\left[\tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\, z \operatorname{grad}\varphi + \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)\,\varphi\,\mathfrak{k}\right] \quad . \quad (10).$$

Ganz analog gilt weiter einerseits $[\operatorname{grad}\varphi, \mathfrak{k}] = \operatorname{rot}(\varphi\,\mathfrak{k})$ und andererseits $[\operatorname{grad}\varphi, \mathfrak{k}] = -\operatorname{rot}(z \operatorname{grad}\varphi)$, daher kann man schreiben

$$\operatorname{rot}(u, v, w) - \operatorname{grad} f = b^2 [\operatorname{grad}\varphi, \mathfrak{k}] = \operatorname{rot}\left[\tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\, z \operatorname{grad}\varphi + \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)\,\varphi\,\mathfrak{k}\right] \quad (11).$$

Bezeichnet man den im Innern der Klammer in den beiden letzten Gleichungen stehenden Vektor mit $\mathfrak{r}$, so wird nach (10) und (11)

$$\operatorname{div}(u\,\mathfrak{i} + v\,\mathfrak{j} + w\,\mathfrak{k} - \mathfrak{r}) = 0, \qquad \operatorname{rot}(u\,\mathfrak{i} + v\,\mathfrak{j} + w\,\mathfrak{k} - \mathfrak{r}) = \operatorname{grad} f, \qquad (\Delta f = 0).$$

Setzt man $f = \frac{\partial \psi}{\partial z}$ mit $\Delta\psi = 0$, so erhält man in Analogie zum Obigen die Gleichung $\operatorname{grad} f = \operatorname{rot}[\operatorname{grad}\psi, \mathfrak{k}]$; damit wird

$$u\,\mathfrak{i} + v\,\mathfrak{j} + w\,\mathfrak{k} - \mathfrak{r} - [\operatorname{grad}\psi, \mathfrak{k}] = \operatorname{grad}\chi \text{ mit } \Delta\chi = 0$$

oder endgültig

$$u\,\mathfrak{i} + v\,\mathfrak{j} + w\,\mathfrak{k} = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\, z \operatorname{grad}\varphi + \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)\,\varphi\,\mathfrak{k} + [\operatorname{grad}\psi, \mathfrak{k}] + \operatorname{grad}\chi,$$

worin φ, ψ und χ harmonische Funktionen sind. In gedrängter Form lautet die letzte Gleichung

$$u\,\mathfrak{i} + v\,\mathfrak{j} + w\,\mathfrak{k} = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\, z \operatorname{grad}\varphi + \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)\,\varphi\,\mathfrak{k} + \mathfrak{z} \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

worin $\mathfrak{z}$ ein harmonischer Vektor mit verschwindender Divergenz ist.

In ähnlicher Weise wird noch eine andere Darstellung des Verschiebungsvektors hergeleitet, doch beschränken wir uns hier auf die Wiedergabe des Endresultates. Wir dürfen dies um so mehr tun, als man sich durch Einsetzen der folgenden Lösung in die Grundgleichung (9) von der Richtigkeit dieser Lösung leicht überzeugen kann. Sie lautet

$$u\,\mathfrak{i} + v\,\mathfrak{j} + w\,\mathfrak{k} = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\frac{r^2}{2} \operatorname{grad}\varphi + \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)\,\mathfrak{r}\,\varphi + [\operatorname{grad}\psi, \mathfrak{r}] + \operatorname{grad}\chi.$$

Hierin ist $\mathfrak{r}$ der Ortsvektor eines Punktes P, $r = |\mathfrak{r}|$, ferner sind φ und ψ harmonische Funktionen, während

$$\Delta\chi = -\tfrac{1}{2}(a^2 + 3\,b^2)\,\varphi.$$

Die einfache Anwendbarkeit der Lösung (12) wird am bekannten Beispiel des von einer Ebene begrenzten Körpers[2]) vorgeführt. Weitere auf die gleiche Formel (12) bezügliche

[1]) Sopra due utili forme dell' integral generale dell' equazione per l'equilibrio dei solidi elastici isotropi, Mem. R. Acc. di Bologna 1926.

[2]) Siehe Love-Timpe, l. c., S. 272 bis 280.

Beispiele sind in einem anschließenden Akademiebericht[1]) mitgeteilt. Hier behandelt Burgatti das Plattenproblem von Clebsch, das dadurch charakterisiert ist, daß für die ganze Platte $X_z = Y_z = Z_z = 0$ ist, wenn die Achse der Platte zur z-Achse genommen wird, und das Zylinderproblem von Saint-Venant, dadurch gekennzeichnet, daß in ebenen Schnitten parallel zur Zylinderachse zu dieser parallele Schubspannungen übertragen werden. In beiden Fällen gelangt Burgatti schnell und elegant zum Ziel. Schließlich wird noch gezeigt, daß man unter geringer Modifikation der Formel (12) zur allgemeinen Lösung des elastischen Problems für den Fall gelangt, daß am Körper konstante parallel gerichtete Massenkräfte angreifen. Hierzu hat man nur in

$$\mathfrak{z} = [\operatorname{grad} \psi, \mathfrak{k}] + \operatorname{grad} \chi$$

die Funktion χ nicht als harmonisch, sondern als Lösung der Poissonschen Differentialgleichung

$$\Delta \chi = c z$$

anzusehen.

2. Zur Lösung der zweidimensionalen Probleme der Elastizitätstheorie.

Eine wesentlich engere Aufgabe, als die vorangehend behandelte, dafür aber mit praktisch unmittelbar verwertbarer Lösung, wird von N. Muschelišvili in einer Reihe von Arbeiten behandelt[2]). Sein Verfahren schließt sich in gewissen Punkten an frühere Untersuchungen von Kolossoff[3]), Almansi[4]) und Boggio[5]) an und ist nicht nur auf einige Fragen der Elastizitätstheorie, sondern allgemein auf Randwertaufgaben sowohl der harmonischen, als auch der biharmonischen Differentialgleichung in der mathematischen Physik bei sehr verschiedenen Randbedingungen anwendbar. Während die erste in der Elastizitätstheorie beispielsweise beim Torsionsproblem auftritt, stößt man auf die letzte in der Plattentheorie beim ebenen Problem (ebener Verzerrungszustand und verallgemeinerter ebener Spannungszustand nach der Terminologie von Love) usw. Für die Anwendbarkeit des Verfahrens im zweiten Falle muß allerdings vorausgesetzt werden, daß der ebene Bereich, für den die betreffende Randwertaufgabe gelöst werden soll, mittels einer rationalen Funktion auf den Kreis konform abgebildet werden kann. Den Ausgangspunkt bildet das Studium gewisser Eigenschaften der Integrale von der Form

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\vartheta)\, d\zeta'}{\zeta' - \zeta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13),$$

worin $\zeta = \xi + i\eta$ ein Punkt der komplexen ζ-Ebene mit dem $\xi\eta$-Koordinatenkreuz, $i = \sqrt{-1}$, γ der Einheitskreis der ζ-Ebene, ζ' ein veränderlicher Punkt auf dessen Peripherie und $f(\vartheta)$ eine reelle Funktion des Kreisbogens ϑ ist. Das Integral $\Phi(\zeta)$ ist offenbar mit dem in der bekannten Cauchyschen Integralformel auftretenden verwandt, wo an Stelle von $f(\vartheta)$ eine analytische Funktion steht. Das Integral (13) besitzt nun folgende fundamentale Eigenschaft: wenn zwei Integrale von der Form (13) für die Funktionen $f_1(\vartheta)$ und $f_2(\vartheta)$ in jedem Punkte ζ innerhalb des Kreises γ einander gleich sind, so ist auch $f_1(\vartheta) = f_2(\vartheta)$ für jeden Wert von ϑ. Ferner verwendet Muschelišvili noch folgende Formeln. Ist $f(\zeta)$ holomorph (d. h. eindeutig, endlich und stetig) im Innern einer geschlossenen Kurve C mit Ausnahme eines einzigen Punktes a, wo $f(\zeta)$ einen Pol mit dem Hauptteil

$$\frac{a_n}{(\zeta - a)^n} + \frac{a_{n-1}}{(\zeta - a)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_1}{\zeta - a}$$

besitzt, so läßt sich aus dem Cauchyschen Satz herleiten

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta')}{\zeta' - \zeta} d\zeta' = f(\zeta) - \frac{a_n}{(\zeta - a)^n} - \frac{a_{n-1}}{(\zeta - a)^{n-1}} - \ldots - \frac{a_1}{\zeta - a} \quad . \; . \; . \quad (14).$$

[1]) Sopra una notevole espressione della deformazione d'un solido elastico isotropo, Mem. R. Acc. di Bologna 1927.

[2]) Eine zusammenfassende Darstellung bietet die Monographie »Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la physique mathématique«, Tiflis 1922.

[3]) G. Kolossoff, Ueber einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie, Ztschr. f. Math. u. Phys., Bd. 62, 1914.

[4]) E. Almansi, Sulla ricerca delle funzioni poli-armoniche, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, T. XIII, 1899.

[5]) T. Boggio, Sull' equilibrio delle membrane elastiche piane (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXV, 1900).

Analogerweise gilt, falls $f(\zeta)$ im Außenraum einer geschlossenen Kurve C holomorph ist, mit etwaiger Ausnahme des Punktes $\zeta = \infty$, wo $f(\zeta)$ einen Pol mit dem Hauptteil

$$a_n \zeta^n + a_{n-1} \zeta^{n-1} + \ldots + a_1 \zeta + a_0$$

haben möge, die Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta')}{\zeta' - \zeta} d\zeta' = a_n \zeta^n + a_{n-1} \zeta^{n-1} + \ldots + a_1 \zeta + a^0 \quad \ldots \quad (15).$$

Diese einfachen Sätze können nun zur Lösung der oben gekennzeichneten Randwertaufgaben folgenderweise verwertet werden. Die Randwertaufgabe der harmonischen Differentialgleichung in sehr allgemeiner Gestalt verlangt die Ermittlung einer im Innen- bzw. Außenraum der Kurve C harmonischen Funktion, einer Funktion U also, die dort der Gleichung

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (A)$$

genügt, mit der Maßgabe, daß sie am Rande C die Bedingung

$$a(s) \frac{\partial U}{\partial x} + b(s) \frac{\partial U}{\partial y} + c(s)\, U = f(s) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

erfüllt, worin $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ und $f(s)$ gegebene Funktionen der Bogenlänge s von C sind.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (A) kann in der Form

$$2\,U = \varphi_1(z) + \overline{\varphi}_1(\overline{z})$$

dargestellt werden, worin $\varphi_1(z)$ zunächst eine willkürliche analytische Funktion und $\overline{\varphi}_1(\overline{z})$ die zu ihr konjugierte Funktion ist. Damit geht (16) über in

$$(a + i\,b)\, \varphi_1'(z) + (a - i\,b)\, \overline{\varphi}_1'(\overline{z}) + c\,[\varphi_1(z) + \overline{\varphi}_1(\overline{z})] = 2\,f.$$

Nehmen wir an, daß $z = \omega(\zeta)$ die Funktion ist, die die konforme Abbildung des in Frage stehenden, durch C berandeten Bereiches der z-Ebene auf den Einheitskreis der ζ-Ebene leistet, und setzen wir $\varphi_1[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta)$, so geht unsere durch (A), (16) ausgedrückte Aufgabe in die Forderung über, eine innerhalb des Einheitskreises holomorphe Funktion $\varphi(\zeta)$ zu ermitteln, die auf dessen Peripherie der Randbedingung

$$A(\zeta')(a + i\,b)\, \varphi'(\zeta') + \overline{A}(\overline{\zeta}')(a - i\,b)\, \overline{\varphi}'(\overline{\zeta}') + c\,[\varphi(\zeta') + \overline{\varphi}(\overline{\zeta}')] = 2\,f \quad . \ (17)$$

genügt, worin $\zeta' = \xi' + i\,\eta'$ einen Peripheriepunkt bedeutet, $A(\zeta') = \frac{1}{\omega'(\zeta')}$ und also $\overline{A}(\overline{\zeta}') = \frac{1}{\overline{\omega}'(\overline{\zeta}')}$. Unter der Voraussetzung, daß die Größen a, b, c rationale Funktionen der Koordinaten ξ', η' sind, kann man mit $2\,\xi' = \zeta' + \overline{\zeta}'$, $2\,i\,\eta' = \zeta' - \overline{\zeta}'$ schreiben

$$a + i\,b = \frac{\Phi(\zeta', \overline{\zeta}')}{\Phi_1(\zeta', \overline{\zeta}')}, \qquad a - i\,b = \frac{\overline{\Phi}(\overline{\zeta}', \zeta')}{\overline{\Phi}_1(\overline{\zeta}', \zeta')}, \qquad c = \frac{\Psi(\zeta', \overline{\zeta}')}{\Psi_1(\zeta', \overline{\zeta}')},$$

worin allgemein $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ usw. Polynome in x, y sind, aus denen man die Polynome $\overline{\Phi}(x, y)$, $\overline{\Psi}(x, y)$ usw. dadurch erhält, daß man in ihnen die Koeffizienten durch deren konjugierte Größen entsprechend ersetzt. Da c reell ist, so sind Ψ und Ψ_1 gleichfalls als reell für jeden Punkt ζ' von γ zu betrachten. Für die Peripheriepunkte von γ gilt $\overline{\zeta}' = e^{-i\vartheta} = 1/\zeta'$. Berücksichtigt man dies alles, so nimmt die Randbedingung (17) die Gestalt an

$$P(\zeta')\, A(\zeta')\, \varphi'(\zeta') + Q(\zeta')\, \overline{A}\left(\frac{1}{\zeta'}\right) \overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right) + R(\zeta')\left[\varphi(\zeta') + \overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\right] = 2\,f_1(\vartheta) \quad (18).$$

Hierin sind P, Q, R rationale Funktionen von der Form $\frac{\Psi(\zeta)}{\zeta^k}$, wobei Ψ ein Polynom bedeutet. Auf Grund der oben bezeichneten fundamentalen Eigenschaft der Integrale von der Form (13) geht die Gl. (18) weiter in

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \left\{P(\zeta')\, A(\zeta')\, \varphi'(\zeta') + Q(\zeta')\, \overline{A}\left(\frac{1}{\zeta'}\right) \overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right) + R(\zeta')\left[\varphi(\zeta') + \overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\right]\right\} \frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{2\,f_1(\vartheta)\, d\zeta'}{\zeta' - \zeta}$$

über, worin ζ ein Punkt innerhalb des Einheitskreises γ ist.

Die Integration der letzten Gleichung ergibt auf Grund von (14) und (15)

$$P(\zeta)\,A(\zeta)\,\varphi'(\zeta) + R(\zeta)\,\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{2 f_1(\vartheta)\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta} + \Phi(\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

worin $\Phi(\zeta)$ eine rationale Funktion ist von der Form

$$\Phi(\zeta) = \frac{c_{-n}}{\zeta^n} + \frac{c_{-n+1}}{\zeta^{n-1}} + \ldots + c_0 + c_1\,\zeta + \ldots + c_m\,\zeta^m,$$

wenn man mit m und n gewisse ganze Zahlen bezeichnet, die die größte Ordnungszahl der rationalen Funktionen $P(\zeta)$, $Q(\zeta)$, $R(\zeta)$ nicht überschreiten, wobei unter der Ordnungszahl einer rationalen Funktion die größere der beiden Ordnungszahlen von Zähler und Nenner verstanden wird. Die Koeffizienten $c_{-n}, c_{-n+1}, \ldots c_0, c_1, \ldots c_m$ sind folgenderweise gebildet. Denkt man sich die Funktion $\varphi(\zeta)$ in eine unendliche Reihe

$$\varphi(\zeta) = \alpha_0 + i\,\beta_0 + (\alpha_1 + i\,\beta_1)\,\zeta + (\alpha_2 + i\,\beta_2)\,\zeta^2 + \ldots$$

entwickelt, so sind die Koeffizienten $c_{-n}, \ldots c_m$ Linearkombinationen der Größen α_0, β_0, α_1, $\beta_1, \ldots \alpha_k$, β_k mit bekannten Koeffizienten, wobei k die Größe $p+1$ nicht überschreitet, wenn man mit p die größte unter den Ordnungszahlen der Funktionen $P(\zeta)$, $Q(\zeta)$, $R(\zeta)$ bezeichnet.

Setzt man die rechte Seite von (19) zur Abkürzung gleich $F(\zeta)$, so findet man durch elementare Integration

$$\varphi(\zeta) = e^{-\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{R(\zeta)\,d\zeta}{P(\zeta)\,A(\zeta)}} \left\{ C + \int\limits_{\zeta_0} e^{\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{R(\zeta)\,d\zeta}{P(\zeta)\,A(\zeta)}} \frac{F(\zeta)}{A(\zeta)\,P(\zeta)}\,d\zeta \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Hierin bezeichnet C eine noch unbestimmte Konstante, während ζ_0 ein willkürlicher Punkt ist, der im Innern von γ liegt und nicht mit den Polen der zu integrierenden Funktionen zusammenfällt. Diese Formel enthält linear eine Anzahl von Konstanten, und zwar C, α_0, $\alpha_1, \ldots \alpha_k$, β_0, $\beta_1, \ldots \beta_k$, und es handelt sich jetzt darum, diese Konstanten zu bestimmen. Dies geschieht in folgender Weise. Die Lösung (20) muß überall im Innern von γ holomorph sein. Sie könnte sonst nur von den Polen der zu integrierenden Funktion herrührende Singularitäten haben. Daher müssen die Konstanten zunächst der Bedingung entsprechen, daß der Ausdruck (20) in der Umgebung eines jeden der innerhalb von γ gelegenen Pole der Funktion $1:[P(\zeta)\,A(\zeta)]$ sowie in der Umgebung von $\zeta = 0$, der möglicherweise ein Pol von $R(\zeta)$ ist, holomorph bleibt. Beispielsweise sei $\zeta = a$ ein innerhalb von γ gelegener einfacher Pol der Funktion $R(\zeta):[P(\zeta)\,A(\zeta)]$ und α das ihm entsprechende Residuum. Dann gilt in der Umgebung von a die Entwicklung

$$e^{\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{R(\zeta)\,d\zeta}{P(\zeta)\,A(\zeta)}} = (\zeta - a)^{\alpha}\,\mathfrak{P}(\zeta - a),$$

worin $\mathfrak{P}$ eine ganze Potenzreihe bezeichnet, die für $\zeta = a$ nicht verschwindet. Damit ergibt sich nach (20) die Entwicklung

$$\varphi(\zeta) = (\zeta - a)^{-\alpha}\,\mathfrak{P}_1(\zeta - a)\,[C + C' + C_{-l}(\zeta - a)^{\alpha - l} + C_{-l+1}(\zeta - a)^{\alpha - l + 1} + \ldots],$$

worin C' und die C_i $(i = -l, -l+1, \ldots)$ Linearkombinationen der Konstanten $c_{-n}, \ldots c_m$ und somit also auch der Konstanten α_0, $\beta_0, \ldots \alpha_k$, β_k sind, während l eine gewisse ganze, nicht negative Zahl bedeutet, die kleiner ist als die Ordnungszahl des Poles a der Funktion $F(\zeta):[P(\zeta)\,A(\zeta)]$, und $\mathfrak{P}_1$ zu $\mathfrak{P}$ reziprok ist. Wenn α ganz ist, so kann auch ein logarithmischer Term von der Form $C''\ln(\zeta - a)$ hinzukommen, worin C'' wiederum linear ist in $\alpha_0, \ldots \beta_k$. Setzt man die Größen $C_{-l}, \ldots C_{-1}$, den Koeffizienten des logarithmischen Gliedes und, wenn α nicht ganz und negativ ist, die Größe $C + C'$ gleich Null, so erhält man ein System linearer Gleichungen für die Koeffizienten C, α_0, $\beta_0, \ldots \alpha_k$, β_k

Eine weitere Reihe von Gleichungen ergibt sich, wenn man (20) in eine Potenzreihe entwickelt und die Koeffizienten von $\zeta^0, \zeta^1, \zeta^2, \ldots \zeta^k$ den Größen $\alpha_0 + i\,\beta_0$, $\alpha_1 + i\,\beta_1, \ldots \alpha_k + i\,\beta_k$ entsprechend gleich setzt. Auf diesem Wege gelingt es, die den Bedingungen des Problems entsprechende Funktion φ zu ermitteln.

Sehr wichtig sind die Anwendungen der Theorie der biharmonischen Randwertaufgabe auf elastizitätstheoretische Untersuchungen. So läßt sich beispielsweise die

Kirchhoffsche angenäherte Plattentheorie[1]) mathematisch wie folgt formulieren: eine in einem gewissen Gebiet S biharmonische Funktion, eine Funktion U also, die dort der Gleichung

$$\varDelta \varDelta U \equiv \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

genügt, ist derart zu bestimmen, daß längs des Randes C von S die Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x(s), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_y(s) \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

erfüllt sind, worin $U_x(s)$ und $U_y(s)$ gegebene stetige Funktionen der Bogenlänge s von C darstellen[2]). Hierbei wird noch vorausgesetzt, daß, falls S unendlich ist, die Beziehungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0\left(\frac{1}{r}\right), \quad \varDelta U = 0\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \ldots \quad (23)$$

gelten, worin r den Abstand des Punktes (x, y) vom Koordinatenursprung bedeutet und das Symbol $0\ (1/r)$ bzw. $0\ (1/r^2)$ dadurch definiert ist, daß $r \cdot 0\ (1/r)$ bzw. $r^2 \cdot 0\ (1/r^2)$ in der Umgebung des unendlich fernen Punktes beschränkt bleibt.

Das Hauptanwendungsgebiet der Theorie des biharmonischen Randwertproblems in der Elastizitätslehre bildet aber die allgemeine Aufgabe über das ebene Problem (siehe oben), daß dadurch charakterisiert ist, daß in unseren Gleichungen (1) bis (5) $w = 0$ und $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ zu setzen sind, während am Rande, wie meist üblich ist, die Spannungen oder die Verschiebungen gegeben sind. In diesem Falle läßt sich die Lösung des Gleichungssystems (4) und (5) unter Zuhilfenahme einer Airyschen Funktion U wie folgt darstellen:

$$X_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad \ldots \ldots \quad (24),$$

$$2\mu u = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} p, \quad 2\mu v = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} q \quad . \quad . \quad (25).$$ [3])

Die Funktion U ist, wie sich aus (24) auf Grund der sogen. Kompatibilitätsbedingungen ergibt, eine biharmonische Funktion, während p und q durch diese Funktion in der Weise mitbestimmt sind, daß $p + i q = \varphi_1(z) = \frac{1}{4}\int^z f_1(z)\, dz$ und $f_1(z) = P(x, y) + i\, Q(x, y)$, worin $P = \varDelta U$ und Q die zu P konjugierte bis auf eine Konstante zu bestimmende harmonische Funktion ist.

Was die Randbedingungen betrifft, so lassen sich die Gl. (5) mit den Werten (24) auf die Form

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = X_\nu(s), \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -Y_\nu(s)$$

bringen, woraus durch Integration die Werte von $\frac{\partial U}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}$ folgen, so daß also, zunächst für den Fall vorgegebener Randspannungen, der Anschluß an das System (21), (22) erreicht ist.

Wie Goursat[4]) zuerst nachgewiesen hat, kann jede biharmonische Funktion U mit der oben angegebenen Bedeutung von $\varphi_1(z)$ in der Form

$$U = \Re\left[\bar{z}\, \varphi_1(z) + \psi_2(z)\right] \quad \ldots \ldots \quad (B)$$

dargestellt werden, wenn man mit $\Re$ den reellen Teil einer komplexen Größe und mit $\psi_2(z)$ eine willkürliche analytische Funktion bezeichnet, eine Formel, die Muschelišvili sehr einfach und elegant herleitet. Aus ihr folgert man mit $\psi_2'(z) = \psi_1(z)$

$$\frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\partial U}{\partial y} = \psi_1(z) + \bar{z}\, \varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1(z)}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = \overline{\psi_1(z)} + z\, \overline{\varphi_1'(z)} + \varphi_1(z) \quad (26).$$

[1]) Siehe Enz. d. math. Wiss. Bd. IV, 25. Nr. 14b (Artikel von O. Tedone und A. Timpe).

[2]) Die Randbedingungen (22) beziehen sich auf den Fall einer Platte mit eingespanntem Rand. Bei freiem oder gestütztem Rand gelten selbstverständlich andere Randbedingungen, doch bleibt das Verfahren auch dann anwendbar. So untersucht A. J. Lurie, Leningrad 1927, den Fall einer Platte mit gestütztem Rand im Rahmen der Methode von Muschelišvili.

[3]) Die Formeln (25) beziehen sich auf den ebenen Verzerrungszustand. Bei der Anwendung auf den verallgemeinerten ebenen Spannungszustand (s. Love-Timpe, l. c, IX. Kap.) muß die Größe λ durch $\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$ ersetzt werden

[4]) E. Goursat, Sur l'équation $\varDelta \varDelta u = 0$, Bull. de la Soc. Math. de France, vol. 26, 1898.

Ist nun wiederum $z = \omega(\zeta)$ die rationale Funktion, die die gewünschte konforme Abbildung liefert und $\zeta' = e^{i\vartheta}$ ein Peripheriepunkt des Einheitskreises γ der ζ-Ebene, so ergeben sich mit $\psi(\zeta) = \psi_1[\omega(\zeta)]$, $\varphi(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)]$ aus den letzten zwei Gleichungen auf Grund von (22) die Randbedingungen

$$\psi(\zeta') + \frac{\overline{\omega}(\overline{\zeta'})}{\omega'(\zeta')}\varphi'(\zeta') + \overline{\varphi}(\overline{\zeta'}) = U_x - i\,U_y, \qquad \overline{\psi}(\overline{\zeta'}) + \frac{\omega(\zeta')}{\overline{\omega'}(\overline{\zeta'})}\overline{\varphi'}(\overline{\zeta'}) + \varphi(\zeta') = U_x + i\,U_y \quad (27).$$

Sind aber am Rande nicht die Spannungen, sondern die Verschiebungen u und v gegeben, so ist nach (25) und (26) mit $k = -(\lambda + 3\mu):(\lambda + \mu)$

$$-2\mu(u - iv) = \psi_1(z) + \overline{z}\,\varphi_1'(z) + k\,\overline{\varphi_1}(\overline{z}) \qquad (\text{auf } C)$$

als Randbedingung zu betrachten. Mit $z = \omega(\zeta)$ ergibt sich hieraus die entsprechende Randbedingung am Einheitskreis in der Gestalt

$$\psi(\zeta') + \frac{\overline{\omega}(\overline{\zeta'})}{\omega'(\zeta')}\varphi'(\zeta') + k\overline{\varphi}(\overline{\zeta'}) = -2\mu(u - iv), \qquad \overline{\psi}(\overline{\zeta'}) + \frac{\omega(\zeta')}{\overline{\omega'}(\overline{\zeta'})}\overline{\varphi'}(\overline{\zeta'}) + k\varphi(\zeta') = -2\mu(u + iv).$$

Hiermit ist, wie der Vergleich mit (27) lehrt, der Fall der vorgegebenen Randverschiebungen formal auf den der vorgegebenen Randspannungen zurückgeführt.

Nun sei $p(\zeta)$ irgendein Polynom, das weder im Innern, noch am Rande des Einheitskreises γ verschwindet und ferner noch dadurch charakterisiert ist, daß die rationale Funktion $\omega(\zeta)\,p(\zeta)$ außerhalb von γ, höchstens mit Ausnahme des unendlich fernen Punktes, keine Pole besitzt. Ist n der Grad von $p(\zeta)$ und m die Ordnungszahl des Poles $\zeta = 0$ der Funktion $\overline{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right):\omega'(\zeta)$, so wird

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\psi(\zeta) = \frac{B_n}{\zeta^n} + \frac{B_{n-1}}{\zeta^{n-1}} + \ldots + \frac{B_1}{\zeta} + \ldots && \text{innerhalb von } \gamma\\
&\varphi'(\zeta)\,\overline{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right):\omega'(\zeta) = \frac{A_m}{\zeta^m} + \frac{A_{m-1}}{\zeta^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{\zeta} + \ldots && \text{» » »}\\
&p(\zeta)\,\overline{\psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \overline{B}_n\zeta^n + \overline{B}_{n-1}\zeta^{n-1} + \ldots + \overline{B}_1\zeta + \overline{B}_0 + 0\left(\frac{1}{\zeta}\right) && \text{außerhalb von } \gamma\\
&\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)p(\zeta)\,\omega(\zeta):\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \overline{A}_m\zeta^m + \overline{A}_{m-1}\zeta^{m-1} + \ldots + \overline{A}_1\zeta + \overline{A}_0 + 0\left(\frac{1}{\zeta}\right) && \text{» » »}\\
&\overline{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = 0\left(\frac{1}{\zeta}\right) && \text{» » »}
\end{aligned}\right\} \quad (28).$$

Hierin sind die Koeffizienten A, B und deren Konjugierte $\overline{A}, \overline{B}$, wenn man für φ und ψ die Entwickelungen

$$\varphi(\zeta) = (\alpha_0 + i\,\alpha_0') + (\alpha_1 + i\,\alpha_1')\,\zeta + \ldots, \qquad \psi(\zeta) = (\beta_0 + i\,\beta_0') + (\beta_1 + i\,\beta_1')\,\zeta + \ldots \quad (28\,\text{a})$$

ansetzt, elementar zu berechnende homogene lineare Kombinationen der Größen $\alpha_0, \alpha_0', \ldots, \alpha_{m+1}, \alpha'_{m+1}$ bzw. der Größen $\beta_0, \beta_0', \ldots \beta_n, \beta_n'$.

Hiernach erhält man nach Multiplikation der Gl. (27) mit

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\overline{p}(\overline{\zeta'})\,d\zeta'}{\zeta' - \zeta} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2\pi i}\,\frac{p(\zeta')\,d\zeta'}{\zeta' - \zeta},$$

Einführung von $1:\zeta'$ für $\overline{\zeta'}$ (auf der Peripherie des Einheitskreises γ) und Integration längs γ auf Grund der Gl. (14) und (15) die Formeln

$$\begin{aligned}
\psi(\zeta)\,\overline{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{B_n}{\zeta^n} - \frac{B_{n-1}}{\zeta^{n-1}} - \ldots - \frac{B_1}{\zeta} + \overline{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{\overline{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta) - \frac{A_m}{\zeta^m} - \ldots - \frac{A_1}{\zeta}&\\
= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(U_x - i\,U_y)\,\overline{p}\,(1/\zeta')}{\zeta' - \zeta}\,d\zeta' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).&
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{B}_n\zeta^n + \overline{B}_{n-1}\zeta^{n-1} + \ldots + \overline{B}_1\zeta + \overline{B}_0 + \overline{A}_m\zeta^m + \ldots + \overline{A}_1\zeta + \overline{A}_0 + p(\zeta)\,\varphi(\zeta)&\\
= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(U_x + i\,U_y)\,p(\zeta')}{\zeta' - \zeta}\,d\zeta' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).&
\end{aligned}$$

Der Schlußteil der Aufgabe besteht jetzt darin, die Größen α und β, aus denen die Koeffizienten A und B sowie $\overline{A}$ und $\overline{B}$ gebildet sind, zu berechnen. Dies geschieht in folgender Weise. Da $p(\zeta)$ im Einheitskreis γ nicht verschwindet, so ergibt die Auflösung von (30) nach φ für diese eine in γ holomorphe Funktion; mit dieser läßt sich auch (29)

nach ψ auflösen, und die erste Bedingung für die obigen Größen wird darin bestehen, daß ψ in der Umgebung des Punktes $\zeta = 0$ holomorph bleibt und daß die Größen $A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_n, \overline{A_0}, \ldots, \overline{A_m}, \overline{B_0}, \ldots, \overline{B_n}$ in der Tat die Koeffizienten der Zerlegungen (28) darstellen, wenn man in die linken Seiten dieser Formeln an Stelle von φ und ψ die für diese Funktionen gefundenen Ausdrücke einsetzt. Um diese Forderungen explizite auszudrücken genügt es, die für φ und ψ gefundenen Darstellungen nach Potenzen von ζ zu entwickeln, was sehr leicht zu machen ist, da die darin vorkommenden Integrale sich sehr einfach zerlegen lassen, hierauf die ersten $m+2$ Koeffizienten der Entwickelung φ den Größen $\alpha_\varkappa + i\,\alpha_\varkappa'$ $(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, m+1)$ entsprechend gleichzusetzen und mit der Entwickelung für die Funktion ψ analog zu verfahren. Auf diese Weise erhält man durch elementare Operationen eine endliche Anzahl linearer algebraischer Gleichungen für die Konstanten $\alpha_0, \alpha_0', \ldots, \beta_n, \beta_n'$. Die zweite Bedingung besteht darin, daß $\psi(\zeta)$ für alle im Einheitskreis liegenden Nullstellen von $\overline{p}\,(1/\zeta)$ endlich bleibt. Es ist leicht zu sehen, daß auch diese Bedingung wie die vorhergehende durch eine endliche Anzahl linearer Gleichungen ausgedrückt wird. Eine dritte Bedingung endlich ergibt sich daraus, daß man im Falle eines endlichen Gebietes S

$$\varphi(0) = 0\,, \qquad \Re\, \frac{1}{i}\, \frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)} = 0\,,$$

im Falle eines unendlichen Gebietes S mit den Bedingungen (23)

$$\varphi(0) = 0 \qquad \psi(0) = 0$$

vorschreiben kann, da die Funktionen φ und ψ nur bis auf gewisse Konstanten definiert sind.

Mit der Ermittelung der Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_0', \ldots, \alpha_{m+1}, \alpha'_{m+1}, \beta_0, \beta_0', \ldots, \beta_n, \beta_n'$ sind die Funktionen φ und ψ und damit nach Gl. (B) auch die Funktion U gefunden, also die Aufgabe gelöst. Muschelišvili führt in seiner Monographie eine Reihe interessanter und lehrreicher Beispiele an, die die Leistungsfähigkeit seines Verfahrens darlegen. In diesem Zusammenhange muß noch erwähnt werden, daß er kürzlich sein Verfahren prinzipiell auch auf den Fall ausgedehnt hat, daß die Abbildungsfunktion $z = \omega(\zeta)$ bei der biharmonischen Randwertaufgabe keine rationale Funktion ist[1]). Ein großes Hindernis auf dem Wege der praktischen Anwendung der an sich durchaus fruchtbaren Methode bilden freilich die erheblichen Schwierigkeiten, die dem Problem der konformen Abbildung an sich in jedem einzelnen Falle zur Zeit noch innewohnen.

In einem kürzlich erschienenen Bericht[2]) geht Muschelišvili speziell auf das Torsionsproblem zylindrischer Körper ein, für das er mit Hilfe einfacher funktionentheoretischer Operationen gewisse praktisch wertvolle Vereinfachungen erzielt. Formal wird das Torsionsproblem bekanntlich auf die erste Randwertaufgabe der ebenen Potentialtheorie für den Normalschnitt des zylindrischen Körpers zurückgeführt[3]). Es handelt sich dort nämlich um die Ermittlung einer analytischen Funktion

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\,\Psi(x, y), \qquad z = x + iy,$$

von der Eigenschaft, daß am Rande C des Normalschnittes des Zylinders

$$\Psi(x, y) = {}^1/_2\,(x^2 + y^2) + \text{konst.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

gilt. Nun bildet Muschelišvili den in Frage stehenden von C umschlossenen ebenen Bereich vermittels der Funktion

$$z = \omega(\zeta)$$

auf den Einheitskreis der ζ-Ebene konform ab und führt damit die Bestimmung der Funktion $F(z)$ auf die der Funktion $f(\zeta) = F[\omega(\zeta)]$ zurück; die Randbedingung (31) geht damit in eine Randbedingung für die Funktion $f(\zeta)$, der diese Funktion auf der Peripherie γ des Einheitskreises zu genügen hat und die die Form

$$\Re\, \frac{1}{i}\, f(\zeta) = {}^1/_2\, \omega(\sigma)\, \overline{\omega}(\overline{\sigma}) + \text{konst.}$$

besitzt, über, worin $\Re$ den reellen Teil einer analytischen Funktion kennzeichnet, σ den Wert von ζ auf γ bedeutet und $\overline{\omega}(\overline{\sigma})$ die zu $\omega(\sigma)$ konjugierte komplexe Größe ist. Jetzt

[1]) Siehe seine Note »Sur l'intégration approchée de l'équation biharmonique«, Comptes rendus, t. 185, 1927, p. 1184.

[2]) Zum Problem der Torsion der homogenen isotropen Prismen, Tiflis 1929; siehe auch seine Note Sur le problème de torsion des cylindres elastiques isotropes i. d. Rendiconti d. R. Acc. Rom 1929.

[3]) S. Love-Timpe, l. c. S. 361 ff. oder Handbuch d. Phys. Bd. VI (1928), S. 144.

wird ein von H. A. Schwarz angegebener und im Bericht besonders einfach hergeleiteter Satz[1]) benutzt, der folgendes besagt. Wenn eine Funktion $\varphi(\zeta)$ innerhalb des Einheitskreises γ holomorph ist und ihr Realteil auf γ den Randwert $V(\sigma)$ annimmt, so ist bis auf eine additive, rein imaginäre Konstante

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma V(\sigma)\frac{\sigma+\zeta}{\sigma-\zeta}\frac{d\sigma}{\sigma},$$

worin ζ einen Punkt innerhalb des Einheitskreises bezeichnet. In Anwendung auf die Funktion $-if(\zeta)$ ergibt dieser Satz die Berechnung von $f(\zeta)$ aus dem Integral

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega(\sigma)\,\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} \quad \ldots\ldots\ldots (32).$$

Wenn die Abbildungsfunktion $\omega(\zeta)$ bekannt ist, so ist die Berechnung der Funktion $f(\zeta)$ nach (32) häufig sehr bequem. Ein interessantes Beispiel bietet der Spezialfall, daß die Größe $\omega(\sigma)\,\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ eine im Einheitskreis eindeutige analytische Funktion von σ ist, die dort eine endliche Anzahl isolierter singulärer Punkte $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ hat. In diesem Falle wird einfach

$$f(\zeta) = i(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n+1}),$$

wenn man mit den Größen A die Residuen des Integranden von (32) hinsichtlich der Punkte $\sigma = \sigma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und $\sigma = \zeta$ bezeichnet. Hieraus ergibt sich unter anderem, daß, wenn $\omega(\zeta)$ eine rationale Funktion ist, die Lösung des Problems mit Hilfe elementarer Funktionen erfolgt.

Die Berechnungen gestalten sich besonders bequem bei Einführung einer bekannten[2]) besonderen Art von krummlinigen Koordinaten, die Muschelišvili übrigens auch in seiner vorangehend besprochenen großen Monographie verwendet. Den Kreisen $\varrho = \text{konst.}$ und ihren Radien $\vartheta = \text{konst.}$ $(\zeta = \varrho e^{i\vartheta})$ der ζ-Ebene entsprechen in der z-Ebene zwei orthogonale Kurvenscharen $\varrho = \text{konst.}$ und $\vartheta = \text{konst.}$, die an Stelle der beiden Geradenscharen $x = \text{konst.}$, $y = \text{konst.}$ zur Bestimmung der Lage eines Punktes benutzt werden können. Dies ist aus dem Grunde wichtig, weil nach der Berechnung von $f(\zeta)$ die Rückkehr zum x, y-System komplizierte Rechnungen ergibt. Beispielsweise erhält man für die resultierende Schubspannung in einem Punkt des Querschnitts im x, y-System den Ausdruck

$$T = \sqrt{X_z^2 = Y_z^2} = K\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + x\right)^2},$$

worin K eine Konstante ist, dagegen ist unter Benutzung des bezeichneten krummlinig-orthogonalen Koordinatensystems

$$T = K\left|\zeta\,\frac{f'(\zeta) - i\,\overline{\omega}(\zeta)\,\omega'(\zeta)}{\varrho\,|\,\omega'(\zeta)\,|}\right|$$

und dieser Ausdruck ist leicht und schnell berechnet, falls $\omega(\zeta)$ und $f(\zeta)$ bekannt sind.

3. Ueber die Stabilität der rotierenden elastischen Welle. Während sich die vorangehend referierten Arbeiten auf allgemeine Fragestellungen der mathematischen Elastizitätstheorie beziehen, liefert eine Untersuchung des Verfassers dieser Zeilen in den Mathematischen Annalen 1929[3]) einen im Sinne der analytischen Mechanik gehaltenen Beitrag zu einer Spezialfrage des elastischen Problems, nämlich zu dem für die Maschinentechnik wichtigen Problem der rasch rotierenden Stäbe (»Wellen«). Gegenüber den in der technischen Literatur üblichen Darstellungen, die, zum Teil unter Zugrundelegung willkürlicher Voraussetzungen, die Stabilität eines rotierenden elastischen Stabes nur unter Berücksichtigung von Störungen spezieller Art untersuchen, bietet die neue Arbeit eine strenge Behandlung der Frage im Rahmen der modernen Variationsrechnung im Anschluß an die bekannte Bornsche Preis- bzw. Dissertationsschrift[4]), deren Erweiterung auf rotierende Systeme sie darstellt. Ausgehend vom Hamiltonschen Prinzip

---

[1]) H. A. Schwarz, Crelles Journal, Bd. 47 (1872), S. 218 ff.

[2]) Siehe z. B. A. Wangerin, Ueber das Problem des Gleichgewichtes elastischer Rotationskörper. Arch. f. Math. Vol. 55 (1873).

[3]) Zur Stabilitätsfrage rotierender elastischer Stäbe. Mathem. Ann. Bd. 101 (1929), S. 1 ff.

[4]) M. Born, Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum. Göttingen 1906.

wird auf dem Wege über den Energiesatz das Stabilitätskriterium einer in zwei Lagern gelagerten dünnen elastischen rotierenden Welle mit zwischenliegender zentrisch aufgesetzter Masse hergeleitet, das hier kurz formuliert werden soll. Hierzu führen wir folgende Bezeichnungen bzw. Festsetzungen ein. Die Welle sei auf ein ruhendes xyz-System bezogen, dessen z-Achse mit der undeformierten Wellenachse zusammenfällt, jedes Element der deformierten Welle dagegen mit einem $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$-System starr verbunden, dessen $\bar{z}$-Achse in die Tangente des Elementes fällt. In undeformiertem Zustand ist jedes $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$-System, von der Drehung abgesehen, mit dem festen xyz-Achsenkreuz identisch, in deformiertem Zustand dagegen ist die Lage eines $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$-Kreuzes gegenüber dem xyz-Kreuz durch ein System Eulerscher Winkel ϑ, φ, ψ charakterisiert. Bezeichnet man mit s die Bogenlänge der gekrümmten Welle, mit $-\alpha$ und $+\beta$ die noch unbekannten Werte von s für $x=0$, $y=0$, $z=0$ (linkes Lager) bzw. $x=0$, $y=0$, $z=a$ (rechtes Lager), worin a der Lagerabstand ist, mit ω die Winkelgeschwindigkeit der Welle bei gleichförmiger Drehbewegung, mit i^2 die Größe $i_1{}^2 - i_2{}^2$, worin i_1 der polare und i_2 der äquatoriale Trägheitsradius der aufgesetzten rotationssymmetrischen Masse M sind, mit $\bar{m}$ die pro Längeneinheit gemessene Masse der Welle (derart, daß $\bar{m}=0$ außerhalb von M, bei M dagegen gleich M : Nabenlänge der Masse ist), bedeuten endlich Striche Differentiationen nach s, so ist mit A und C als Elastizitätskonstanten der mathematische Ausdruck der Frage nach den stabilen Zuständen der rotierenden Welle durch die Forderung gegeben, das Integral

$$V = \int_{-\alpha}^{+\beta} [{}^1\!/_2\, A\,(\psi'^2 \sin^2\vartheta + \vartheta'^2) + {}^1\!/_2\, C(\varphi' + \psi' \cos\vartheta)^2 - {}^1\!/_2\, \bar{m}\,(x^2 + y^2 - i^2 \sin^2\vartheta)\,\omega^2]\, ds \quad (33)$$

unter Beachtung der Nebenbedingungen

$$x' - \sin\vartheta \sin\psi = 0; \quad y' + \sin\vartheta\cos\psi = 0; \quad z' - \cos\vartheta = 0 \quad . \; . \quad (34)$$

zum Minimum zu machen.

Hierin bietet die Einführung der Eulerschen Winkel nicht nur den Vorteil, daß sich höhere Ableitungen der Koordinaten x, y, z nach s den Forderungen der Variationsrechnung gemäß aus V eliminieren lassen, wesentlicher ist die Tatsache, daß mit Hilfe dieser Funktionen die Aufgabe formal auf das bekannte Problem des symmetrischen Kreisels zurückgeführt wird, was, nebenbei bemerkt, einen Beleg für die von Kirchhoff festgestellte kinetische Analogie zwischen dem eindimensionalen elastischen Problem und dem Kreiselproblem liefert.

Zunächst ergibt sich aus der Gestalt des Integrals V folgender wichtiger Satz: Wenn $i^2 = 0$ ist, d. h. wenn I_a und I_p und somit die Trägheitsmomente von M hinsichtlich aller Schwerpunktsachsen einander gleich sind, so üben diese Trägheitsmomente auf die Stabilitätsverhältnisse der Welle keinen Einfluß aus. Diese Voraussetzung wird der ganzen Untersuchung zugrundegelegt, da sich sonst ungeheuer komplizierte Rechnungen ergeben.

Die aus (33) nebst (34) in üblicher Weise abzuleitenden Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen, die nichts anderes sind, als die Differentialgleichungen der Extremalen des Problems, d. h. der Kurven, die sich aus dem Verschwinden der 1. Variation von V ergeben (entsprechend dem Verschwinden der 1. Ableitung bei den Maxima-Minima-Aufgaben der Differentialrechnung), müssen zur Durchführung der Integration auf ein anderes Koordinatensystem $(\xi, \eta, \zeta, \vartheta, \varphi, \psi)$ transformiert werden, das dadurch definiert ist, daß die ζ-Achse mit der Zentralachse des Systems zusammenfällt, d. h. mit der zur Richtung der resultierenden Kraft parallelen Geraden, die die Eigenschaft besitzt, daß bei der Verlegung der bezeichneten Kraft in diese Gerade auch der resultierende Momentenvektor die gleiche Richtung erhält, wenn beide Systeme äquivalent sein sollen. Da die Kraftsysteme beiderseits von M voneinander verschieden sind, so sind auch die Zentralachsen für beide Wellenhälften voneinander verschieden. Folglich werden die konstanten Parameter in den Gleichungen der Extremalen an der Stelle der Masse M einen Sprung erleiden müssen. Die Integration der Differentialgleichungen, die laut Obigem auf die des Kreiselproblems zurückgeführt erscheinen, löst sich nach Lagrange in eine Reihe von Quadraturen auf, die hier ohne weiteres aufzustellen sind, da die die Bewegung des Gebildes gegenüber der ruhenden Elastika (für die ja zunächst die kinetische Analogie überhaupt gilt) zum Ausdruck bringende Größe ω, wie sich zeigt, nur den obenerwähnten Sprung der konstanten Parameter verursacht. Die Lösung ergibt sich in der Gestalt eines sehr komplizierten Gleichungssystemes mit 17 Parametern, von denen nur 12 von-

einander unabhängig sein können. Nach Elimination der überzähligen Parameter erhält man aus der linksseitigen Transversalitätsbedingung (diese besagt, daß das Minimum von V, falls es existiert, auch gegenüber den Variationen als solches bestehen bleibt, bei denen das linke Ende der Kurve auf der mehrdimensionalen Fläche $x=0$, $y=0$, $z=0$ des $s x y z \vartheta \varphi \psi$-Raumes wandert) die für $x=0$, $y=0$, $z=0$ zu erfüllenden Randbedingungen. Auf diesem Wege ergibt sich im eben bezeichneten siebendimensionalen Raume eine sechsparametrige Extremalenschar, in der auch die Lösungen für verschiedene ω-Werte enthalten sind, die die Beharrungszustände der rotierenden Welle kennzeichnen. Diese Lösungen findet man natürlich dadurch, daß man auch die rechtsseitigen Randbedingungen an der »Hyperfläche« $x=0$, $y=0$, $z=a$ erfüllt. Die erwähnte, die Lösungskurven umgebende sechsparametrige Extremalenschar spielt nun für die Beurteilung der Stabilität eine entscheidende Rolle, wie gleich näher erläutert wird. Diese Schar besteht aber noch laut obigem aus zwei infolge des Sprunges bei M unzusammenhängenden Hälften, und es handelt sich daher zunächst darum, die Parameter der rechten Wellenseite auf die der linken Seite zurückzuführen. Infolge des äußerst komplizierten Charakters der in Frage kommenden Funktionen ist die Auflösung der Gleichungen für die beiderseitigen Parameter, wonach bei M die Größen $x, y, z, \vartheta, \varphi, \psi$ stetig bleiben müssen, nur in der näheren Umgebung einer Lösungskurve möglich, was jedoch für die weitere Behandlung des Problems genügt. Voraussetzung für diese ist allerdings, daß die ausgesonderte Extremalenschar im mehrfach bezeichneten mehrdimensionalen Funktionenraume, den bisher ausgebildeten Methoden der Variationsrechnung zufolge, durch einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt gekennzeichnet ist, eine Forderung, die weder im $s x y z \vartheta \varphi \psi$-Raume, noch im $s \xi \eta \zeta \vartheta_1 \varphi_1 \psi_1$-System erfüllt ist. Es gelingt jedoch, für jede Extremale der Schar ein individuelles Koordinatensystem eindeutig anzugeben und alle individuellen Koordinatensysteme derart miteinander zur Deckung zu bringen, daß ein neuer eindeutiger Extremalenraum von der verlangten Eigenschaft entsteht. Ein individuelles Koordinatensystem der bezeichneten Art ergibt sich unter Zugrundelegung des oben definierten $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$-Achsenkreuzes und ist dementsprechend als $s\,\bar{\vartheta}\,\bar{\varphi}\,\bar{\psi}\,\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$-Raum zu bezeichnen. Auf diesen Raum sind also (33) und (34) zu transformieren. Bezeichnet man mit $(\overline{x\,y\,z})$ das Transformationsergebnis für die Größe $-\frac{1}{2}\,\bar{m}\,\omega^2(x^2+y^2)$ und mit $[\overline{x\,y\,z}]_i$, $(i=1, 2, 3)$, die Gleichungen der Abbildung von $x=0$, $y=0$, $z=a$ im überstrichenen Raume, berücksichtigt man ferner, daß der Integrand von V — bis auf die Größe $\frac{1}{2}\,\bar{m}\,\omega^2(x^2+y^2)$ — und die Nebenbedingungen (34) gegenüber linearen Transformationen mit orthogonaler Matrix invariant sind, so ist das transformierte Problem ohne weiteres hinzuschreiben und lautet dann wie folgt: Unter allen Kurven im $s\,\bar{\vartheta}\,\bar{\varphi}\,\bar{\psi}\,\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$-Raume, die einen gegebenen festen Punkt mit der Hyperfläche $[\overline{x\,y\,z}]_i$ $(i=1, 2, 3)$ verbinden und dabei den Nebenbedingungen

$$\bar{x}' = \sin\bar{\vartheta}\sin\bar{\psi}\,; \qquad \bar{y}' = -\sin\bar{\vartheta}\cos\bar{\psi}\,; \qquad \bar{z}' = \cos\bar{\vartheta}$$

genügen, ist diejenige zu finden, die dem Integral

$$\int\left[\tfrac{1}{2}A(\bar{\psi}'^2\sin^2\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}'^2)+\tfrac{1}{2}C(\bar{\varphi}'+\bar{\psi}'\cos\bar{\vartheta})^2+(\overline{x\,y\,z})\right]ds$$

den kleinsten Wert erteilt. Damit sind alle Vorbereitungen zur direkten Anwendung der hinreichenden Kriterien des Minimums auf das Problem erledigt. Die Entscheidung stützt sich auf die berühmte Weierstraßsche Theorie, deren Grundgedanke hier kurz angedeutet werden mag. Betrachtet man neben der gefundenen Lösung in einer genügend engen Umgebung eine den Neben- und Randbedingungen, sowie gewissen Stetigkeitsforderungen genügende, sonst aber willkürliche Kurve, so handelt es sich um die Bestimmung der Differenz der längs der Lösung und der Vergleichskurve erstreckten Integrale über die Funktion

$$\begin{aligned}\Omega = {}&\tfrac{1}{2}A(\bar{\psi}'^2\sin^2\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}'^2)+\tfrac{1}{2}C(\bar{\varphi}'+\bar{\psi}'\cos\bar{\vartheta})^2+(\overline{x\,y\,z})\\ &+\Lambda(\sin\bar{\vartheta}\sin\bar{\psi}-\bar{x}')+M(-\sin\bar{\vartheta}\cos\bar{\psi}-\bar{y}')+N(\cos\bar{\vartheta}-\bar{z}'),\end{aligned}$$

worin Λ, M, N sogenannte Euler-Lagrangesche Multiplikatoren sind. Diese Berechnung führt Weierstraß unter Zugrundelegung des von ihm im Jahre 1879 aufgestellten Begriffes des »Extremalenfeldes« oder kurz des »Feldes« durch. Dieses ist mit der oben mehrfach erwähnten (sechsparametrigen) Extremalenschar identisch, wenn die Umgebung der Lösung mit Extremalen einfach und lückenlos, d. h. so ausgefüllt ist, daß durch jeden Punkt des betrachteten Gebietes eine und nur eine Extremale hindurchgeht.

Ist diese Bedingung des »regulären« Feldes erfüllt, so läßt sich durch jeden Punkt der Vergleichskurve, die ja ganz im Felde verläuft, eine und nur eine Feldextremale ziehen, und nur in diesem Falle ist die weitere Berechnung durchführbar. Die Regularität des Feldes ist somit das eine der zu erfüllenden Kriterien. Ist diese Forderung in der Tat erfüllt, so kann die bezeichnete Integraldifferenz durch Substitution der den Punkten der Vergleichskurve eindeutig zugeordneten Feldextremalen berechnet werden. Sie ist ein Integral über die »Weierstraßsche E-Funktion« und für jede Vergleichskurve im Felde positiv, das Minimum also gesichert, wenn die E-Funktion längs der Feldextremalen positiv definit ist. Dies ist das zweite Kriterium. Beide zusammen sind hinreichend, jedes ist notwendig.

Die Weierstraßsche E-Funktion ergibt sich, wenn man die Größe Ω als Funktion der in ihr vorkommenden Ableitungen in eine Taylorsche Reihe entwickelt und die linearen Glieder streicht. Sie ist also, wenn man durch deutsche Buchstaben eine spezielle Extremale kennzeichnet, die durch einen ins Auge gefaßten Punkt der Vergleichskurve hindurchgeht, definiert durch

$$E = \Omega(\overline{\vartheta'}, \overline{\varphi'}, \overline{\psi'}, \overline{x'}, \overline{y'}, \overline{z'}) - \Omega(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) - (\overline{\vartheta'} - \mathfrak{a})\,\Omega_{\mathfrak{a}} - (\overline{\varphi'} - \mathfrak{b})\,\Omega_{\mathfrak{b}}$$
$$- (\overline{\psi'} - \mathfrak{c})\,\Omega_{\mathfrak{c}} - (\overline{x'} - \mathfrak{d})\,\Omega_{\mathfrak{d}} - (\overline{y'} - \mathfrak{e})\,\Omega_{\mathfrak{e}} - (\overline{z'} - \mathfrak{f})\,\Omega_{\mathfrak{f}}.$$

Da die Größe $(\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z})$ im Ausdruck für Ω keine Ableitungen enthält, so kann sie bei der Bildung der E-Funktion fortgelassen werden. Die Ausrechnung ergibt

$$E = {}^1/_2\, A\left[(\overline{\psi'} - \mathfrak{c})^2 \sin^2 \overline{\vartheta} + (\overline{\vartheta} - \mathfrak{a})^2\right] + {}^1/_2\, C\left[(\overline{\varphi'} + \cos \overline{\vartheta}\, \overline{\psi'}) - (\mathfrak{b} + \mathfrak{c} \cos \overline{\vartheta})\right]^2.$$

Dies ist eine positiv definite quadratische Form. Die Weierstraßsche Bedingung ist überall im Felde erfüllt.

Der analytische Ausdruck für die Jacobische Bedingung der Regularität des Feldes besteht darin, daß die Funktionaldeterminante des die Feldextremalen darstellenden Funktionensystems nach den Feldparametern in jedem Punkt mit Ausnahme des gemeinschaftlichen Anfangspunktes der Feldextremalen von Null verschieden ist. Die Ausrechnung der Jacobischen Determinante ist nun wiederum außerordentlich kompliziert und gelingt nur für die Umgebnng der geradlinigen Lösung (gestreckte Welle). In diesem Gebiete ist auch das Jacobische Kriterium erfüllt und man erhält somit als endgültiges Ergebnis der Untersuchung das Resultat: **Die in zwei Lagern gelagerte masselose Welle mit zwischenliegender zentrisch aufgesetzter Masse in der Gestalt eines symmetrischen Rotationskörpers von konstantem Schwerpunkts-Trägheitsmoment ist im Zustande gleichförmiger Drehbewegung in gestreckter Lage bei jeder Drehgeschwindigkeit stabil.** 39

KLEINE MITTEILUNGEN

Die Kreisplatte mit zentrischem Loch. (Aus dem Institut für technische Strömungsforschungs, T. H., Berlin.) Weitaus die einfachste Aufgabe aus dem Gebiete der zweifach zusammenhängenden Platten ist die Biegung der am Außenrande freigelagerten oder volleingespannten, am Innenrande ungestützten konzentrischen Kreisringplatte. Die freigelagerte Kreisringplatte ist von A. und L. Föppl in Drang und Zwang I, 2. Auflage, S. 189 u. ff. ausführlich behandelt. In der Ableitung hat sich indessen ein Fehler eingeschlichen, welcher auch die Endergebnisse wesentlich verfälscht.

Im vorliegenden soll diese Aufgabe auf einem anderen übersichtlicheren Wege behandelt werden. Wir wollen uns nämlich der von mir an anderer Stelle eingeführten höheren Singularitäten[1]) zur Lösung bedienen.

Wir gehen also von der nicht durchbrochenen, also vollen, freigelagerten Kreisplatte mit Vollbelastung aus. Einfachste Symmetrie- und Mannigfaltigkeitsbetrachtungen führen uns schon darauf, daß man im Plattenmittelpunkt nur eine konzentrierte Einzellast P und ein konzentriertes Zentralmoment C passender Größe anbringen muß, um einen vorgeschriebenen konzentrischen Teil der Platte freizulegen. Die Durchbiegung aus einer gegebenen gleichmäßigen Belastung sowie aus einer gegebenen konzentrierten Einzellast sind wohlbekannt. Wir müssen also, bevor wir zur Größenermittlung von P und C und zur Ueberlagerung übergehen, nur noch die Durchbiegungsfunktion aus einem gegebenen konzentrierten Zentralmoment C bestimmen.

Ein konzentriertes Zentralmoment läßt sich

[1]) Siehe Neményi: Ueber eine neue Singularitätenmethode für die Elastizitätstheorie. Diese Zeitschr., Bd. 9 (1929), S. 488. Ein ausführlicherer Aufsatz über den Gegenstand erscheint ebenfalls in dieser Zeitschrift.

dieser beiden Größen. Man wird sie im allgemeinen einem Tilgungsplan entnehmen können. Die Gesamtschuld hat sich dann in dem betreffenden Jahr von S auf $S' = S - Q$ reduziert.

In einem Jahr bis zur nächsten Auslosung wächst der Kurs — genauer der sogenannte Nettokurs (ausschließlich der Stückzinsen) — zunächst auf $Cr' - p$ an, wo $r' = 1 + \frac{p'}{100}$ ist. Dieser Kurs stimmt aber nicht mit dem für die Zeit nach erfolgter Auslosung berechneten Kurs C' überein, sondern wenn man C und C' nach irgendeiner Kursformel berechnet, findet man $Cr' - p$ größer als C. Dies rührt daher, daß der aus p' theoretisch berechnete Kurs durch die Auslosung einen Abschlag erfahren muß, weil die Chancen, welche die Auslosung den Papieren bietet, nach derselben für die nicht ausgelosten Papiere fortfallen.

Dieser Kursabschlag infolge der Auslosung ist folgendermaßen zu berechnen: Während der Effektivwert der vor der Auslosung umlaufenden Teilschuldverschreibungen $\frac{1}{100}(Cr' - p)S$ ist, sinkt er durch die Rückzahlung um die Summe Q auf $\frac{1}{100} C' S'$. Man hat also

$$S' C' = S(C r' - p) - 100\,Q \quad . \quad (1)$$

als Rekursionsformel für den Kurs und der Sprung Δ, welchen der Kurs bei der Verlosung macht, ist

$$\Delta = Cr' - p - C' = \frac{1}{S'}[100\,Q - (Cr' - p)(S - S')]$$

oder da $S - S' = Q$ ist:

$$\Delta = \frac{Q}{S'}(100 - C r' + p) \quad . \quad . \quad (2);$$

bei der zahlenmäßigen Rechnung wird man zuerst $Cr' - p$ berechnen und davon Δ (mit Rechenschieber berechnet) abziehen.

2. Nießbrauch und bloßes Eigentum.

Der Mantel und der Zinsschein-Bogen einer Teilschuldverschreibung befinden sich in der Regel in ein und derselben Hand, aber man ist aus theoretischen Gründen genötigt, den Kurs C eines festverzinslichen Papiers in den des Mantels C_m und den des Zinsscheinbogens C_z zu zerlegen. Wenn nämlich aus irgendwelchen Gründen der nominelle Zinsfuß p in p_1 abgeändert wird, während im übrigen der Tilgungsplan beibehalten wird, so ändert sich nur C_z und zwar im Verhältnis $p_1 : p$, weil alle Zinszahlungen sich in diesem Verhältnis ändern. Der Kurs des Nießbrauchrechts ist dann also $\frac{p_1}{p} C_z$; der Kurs des Eigentumsrechts aber bleibt derselbe C_m, so daß sich als Kurs des Papiers bei Konvertierung des Zinsfußes aus p in p_1 $\frac{p_1}{p} C_z + C_m$ ergibt. Würde insbesondere als neuer Zinsfuß p gerade der effektive Zinsfuß p' gewählt, so müßte der Kurs genau auf 100 steigen. So entsteht die allgemein gültige Formel

$$\frac{p'}{p} C_z + C_m = 100 \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

welche zusammen mit

$$C_z + C_m = C \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

aus jeder der drei Größen C, C_z, C_m die beiden anderen zu berechnen gestattet, wenn der Effektivzinsfuß bekannt ist.

Es mag auf eine Anwendung hingewiesen werden, welche sich auf den Kurs einer Anleihe in der Höhe S bezieht, die in n gleichen Jahresraten $\frac{1}{n} S_0$ getilgt wird. Hier ist gegenüber der unmittelbaren Berechnung des Kurses C für einen gegebenen effektiven Zinsfuß p' vH die Berechnung des Kurses C_m des bloßen Eigentums außerordentlich einfach. Wenn die Anleihe noch m Jahre läuft, ist der Barwert der noch zu erwartenden m Tilgungen in der Höhe $\frac{1}{n} S_0$:

$$\frac{1}{n} S_0 (v' + v'^2 + \ldots v'^m) = \frac{1}{n} S_0\, a'_{\overline{m}|},$$

wenn $\frac{1}{v'} = r' = 1 + \frac{p'}{100}$, also

$$C_m = \frac{100}{n} a'_{\overline{m}|}.$$

Mittels der Gleichungen (3) und (4) findet man dann auch C.

Andere bekannte Anwendungen der Zinsfußkonvertierung sind die Berücksichtigung der Kapitalertragsteuer durch den Käufer eines Papiers; $\frac{p_1}{p}$ ist hier $\frac{9}{10}$. Der Käufer darf nur den Kurs $\frac{9}{10} C_z + C_m$ für ein Papier bieten, wenn er abzüglich der Steuer den Zinsfuß p vH erzielen will. Ferner gehört hierher die Berechnung des Kurses eines Papiers, wenn die Zinsscheine halbjährlich fällig sind, es ist dann $\frac{p_1}{p} = \frac{1 + \sqrt{r'}}{2}$. Man hat somit angenähert zu C noch $\frac{p' C_z}{400}$, also nach (3) und (4) $\frac{p\,p'}{p' - p} \frac{100 - C}{400}$ beizufügen.

Zur Herleitung der Kurse C_z' und C_m', welche nach einem Jahr gelten und zum gleichen Effektivzinsfuß p' vH gehören, wie C_z und C_m, hat man zunächst die Kurse vor der am Ende des Jahres stattfindenden Auslosung $C_z r' - p$ und $C_m r'$ zu berechnen und dann den Kursabschlag

$$\Delta_z = -\frac{Q}{S'}(C_z r' - p) \quad \text{bzw.} \quad \Delta_m = \frac{Q}{S'}(100 - C_m r')$$

zu subtrahieren. Δ_z ist negativ. Der Kurs des Nießbrauchrechts steigt also infolge der Auslosung, aber so, daß die Abnahme des Kurses des bloßen Eigentums überwiegt. (Aus (3), (4) und (5) folgt noch die einfache Beziehung

$$\frac{\Delta_z}{p} + \frac{\Delta_m}{p'} = \frac{Q}{S'}.)$$

Will man umgekehrt den Kurs C aus dem Kurs C' des nächstfolgenden Jahres berechnen, so werden zwar die Formeln für den Kursabschlag noch einfacher, nämlich

$$\Delta_z = -\frac{Q}{S}C_z' \quad \Delta_m = \frac{Q}{S}(100 - C_m') \quad \Delta = \frac{Q}{S}(100 - C');$$

derselbe ist zu $C_z' + p$, C_m' bzw. C' zu addieren, so werden $C_z r'$, $C_m r'$ bzw. Cr' gefunden. Dann wäre aber noch auf ein Jahr zu diskontieren, was die gesamte Rechenarbeit komplizierter macht als bei der Bestimmung von C' aus C.

3. Einlösung mit Aufgeld. Verlosung vor Jahresschluß.

Werden Teilschuldverschreibungen vom Nennwert Q am Ende des Jahres ausgelost, aber mit einem Aufgeld von z vH eingelöst, so daß das Erfordernis $\frac{100+z}{100}Q$ ist, so ist in der Formel (1) $100 + z$ an Stelle der Zahl 100 zu setzen. Dasselbe gilt bei den Formeln (2), (3) und (5) sowie unten in (1′), (2′) usf.

Die Auslosung findet in der Regel nicht am Zinstermin, sondern einige Monate früher statt. Der Kursabschlag müßte dann mit der Bekanntmachung des Ergebnisses eintreten, während der Kurs der ausgelosten Papiere entsprechend steigt.

Der Kurs des Papiers wächst vom letzten Zinstermin bis zur Ziehung einschließlich der laufenden Stückzinsen auf Cr'^{μ}, wenn der zwischenliegende Zeitraum μ Jahre beträgt, wo $\mu < 1$ ist. (Die Kursentwicklung läßt sich nämlich in vorliegendem Fall so leichter darstellen, als wenn man mit dem Nettokurs ausschließlich der laufenden Stückzinsen, also mit $Cr'^{\mu} - p\mu$ rechnen würde. Nur hat man jetzt zwei Kurssprünge zu beachten, den einen bei der Auslosung, den anderen viel größeren bei der Zinszahlung.)

Durch die Auslosung mag der Kurs von Cr'^{μ} auf $C^{(\mu)}$ sinken. Dann ist der 100fache Effektivwert der ganzen Anleihe nach der Auslosung

$$S'\,C^{(\mu)} = S\,C\,r'^{\mu} - 100\,Q\,r'^{\mu-1};$$

der Faktor $r'^{\mu-1}$ beim letzten Glied der rechten Seite rührt daher, daß die Auszahlungen in der Höhe Q erst $1-\mu$ Jahre nach der Verlosung erfolgen, daß also ihr Barwert zur Zeit der Verlosung $Q\,r'^{\mu-1}$ ist. Der Kurssprung infolge der Auslosung ist

$$\Delta = \frac{Q}{S'}(100\,r'^{\mu-1} - C\,r'^{\mu}) \qquad (2').$$

In der Zeit zwischen Ziehung und Zinstermin, die $1-\mu$ Jahr beträgt, steigt der Kurs $C^{(\mu)}$ auf $C^{(\mu)}r'^{1-\mu}$.

Am Zinstermin sinkt der **Kurs** $C^{(\mu)}r'^{1-\mu}$ durch die Auszahlung von p vH, aber nicht etwa gerade um p, denn da auch für die ausgelosten Papiere, also im ganzen für die Summe S, die Zinsscheine am Ende des Jahres eingelöst werden, der Zinsbedarf also $S\frac{p'}{100}$, nicht bloß $S'\frac{p}{100}$ ist, so ist der 100fache Gesamteffektivwert

$$S'\,C' = S'\,C^{(\mu)}\,r'^{1-\mu} - S\,p\,.$$

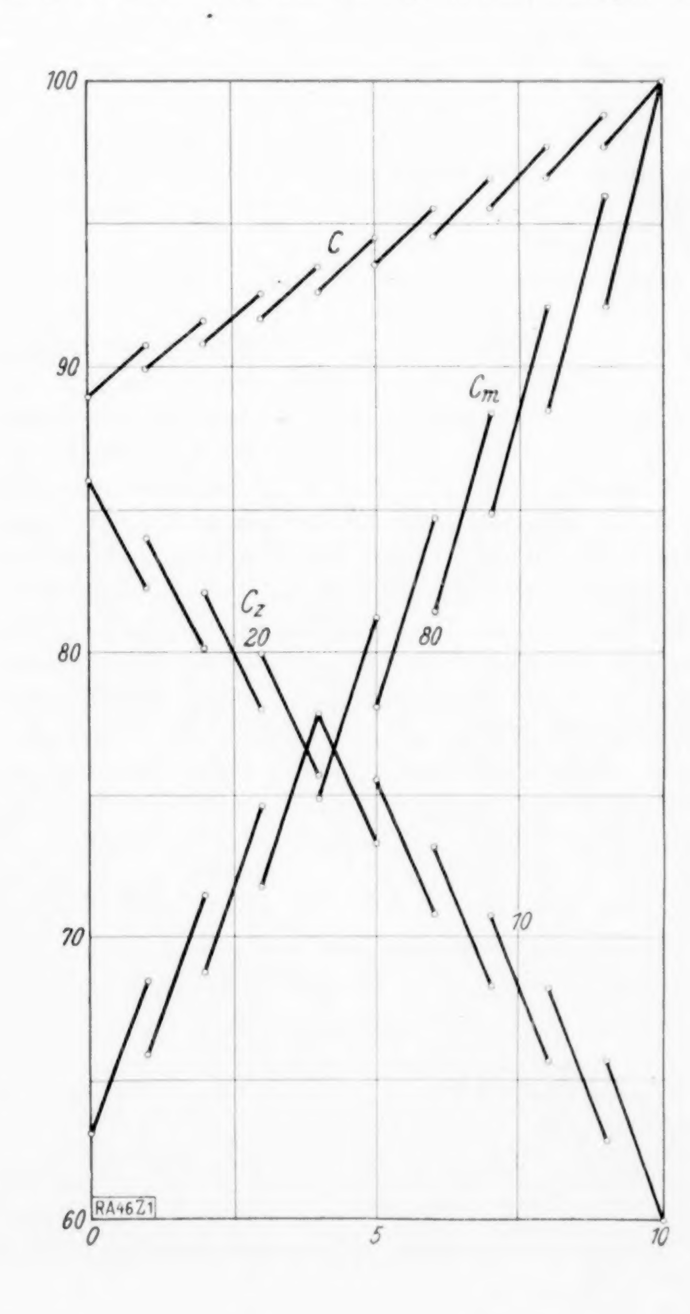
Setzt man hier den oben gefundenen Wert für $S'\,C^{(\mu)}$ ein, so ergibt sich wieder, wie zu erwarten war, Gleichung (1) zwischen C und C'. Der Kursabschlag am Zinstermin ist $\frac{S}{S'}p$.

4. Wenn kein Tilgungsplan vorliegt, aus dem man die Tilgung Q und die dann noch übrige Schuldsumme S entnehmen kann, muß man zur Anwendung der Formeln (1) und (2) das Verhältnis $S':Q$ oder das um 1 größere Verhältnis $S:Q$ aus den Anleihebedingungen berechnen. Dies soll für die beiden wichtigsten Anleiheformen durchgeführt werden. Eine Nachprüfung der Rekursionsformeln durch direkte Berechnung der Kurse C und C' für zwei aufeinanderfolgende Jahre läßt sich leicht anschließen, soll aber dem Leser überlassen werden.

Es sei zunächst wieder der Fall gewählt, wo eine Anleihe S_0 durch alljährlich gleich hohe Rückzahlungen $Q = \frac{1}{n}S_0$ getilgt wird. Ist nach der $(n-m)$ten Tilgung die Schuldsumme S, also da noch m Tilgungen zu erwarsind, $S = mQ$, so hat man

$$S:Q = m.$$

Wenn dagegen eine Anleihe durch eine jedes Jahr gleichbleibende Annuität (zuzüglich der ersparten Zinsen) getilgt wird, ist die Berechnung des Verhältnisses $S:Q$ etwas weniger ein-



fach, zwar ergibt sich, wenn noch m gleich hohe Annuitäten zu erwarten sind:

$$S : Q = 1 + r + r^2 + \ldots r^{m-1} = s_{\overline{m|}},$$

weil S gleich der Summe der Tilgungsbeträge ist, die bekanntlich gleich Q, $Qr \ldots$ sind. Praktisch wird aber meist die volle Tilgung nicht durch eine Reihe von m gleichen Annuitäten erreicht, sondern es bleibt noch eine Restquote für das folgende Jahr zu tilgen übrig, man legt dann besser eine retrospektive Betrachtung zugrunde. Sei Q_0 die erste, Q die $(q+1)$te Tilgung der Anleihe S_0, also $Q = Q_0 r^q$, dann ist der Schuldrest nach q Jahren

$$S = S_0 - Q_0 (1 + r + r^2 + \ldots r^{q-1})$$

also

$$S : Q = \frac{S_0}{Q_0} v^q - (v + v^2 + \ldots v^q) = \frac{S_0}{Q_0} v^q - a_{\overline{q|}},$$

oder, wenn Q_0 gleich t vH von S_0 ist (gewöhnlich ist t eine einfache Zahl):

$$S : Q = \frac{100}{t} v^q - a_{\overline{q|}}.$$

Als Beispiel ist $p = 6$ $p' = 8{,}5$ bei Tilgung durch gleiche Annuitäten in 10 Jahren gewählt worden. Die Kurse C, C_z, C_m sind nur mit dem Rechenschieber auf zwei Dezimalstellen berechnet und in der Abbildung graphisch dargestellt. C_z ist dabei der Raumersparnis halber um 60 nach oben verschoben worden.

Berlin-Dahlem. E. Stübler. 46

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

S. **TIMOSHENKO,** Professor of Engineering Mechanics University of Michigan. Vibration Problems in Engineering. D. van Nistrand Company, Inc. New York 1928. VI + 351 S.

Bei dem steigenden Interesse, das heute auf allen Gebieten der Technik für Schwingungsvorgänge besteht, muß man ein Buch begrüßen, das, wie das vorliegende, von einem einheitlichen theoretischen Standpunkt aus, aber unter dauernder Rücksichtnahme auf die in der Praxis vorliegenden Probleme, den Gegenstand behandelt. Der Verfasser geht von den elementaren Ansätzen für ein elastisches System von einem Freiheitsgrad aus und erörtert schon an diesem die mannigfachen möglichen Fragestellungen in ausführlicher Weise. Dabei werden allerdings Aufgaben, wie die der kritischen Geschwindigkeit einer Welle mit Einzellast schon mit einbezogen. Im zweiten Kapitel wird die Einwirkung verschiedener Dämpfungskräfte berechnet, das dritte dehnt die Theorie auf Systeme mit mehreren Freiheitsgraden aus. In dem nächsten Abschnitt, der den Schwingungsvorgängen an elastischen Körpern im eigentlichen Sinne gewidmet ist, kommen die auf der Energiebetrachtung beruhenden Berechnungsmethoden, die vom Verf. selbst herrühren, zu erfolgreicher Anwendung. Schließlich folgt ein Anhang, der verschiedene Abarten von Schwingungsmessern, auch Seismographen und ähnliches behandelt. Das Buch stellt eine sehr erfreuliche Bereicherung der technisch-wissenschaftlichen Literatur dar, die auf vielen Gebieten Nutzen stiften wird.

Mises. 47

THEODOR **VAHLEN,** Deviation und Kompensation. Neue Grundlegung der Theorie. Neue Anwendung auf die Praxis. Mit 27 Abb. Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1929. VIII + 180 S. Preis geh. 7,60 M., geb. 9,60 M.

Für die verschiedenen Aufgaben geometrischer Art, die mit der Verwendung des magnetischen Kompasses zusammenhängen, fehlte es seit langer Zeit an einer zusammenfassenden Darstellung. Der Verfasser hat sich mit großer Sorgfalt der Arbeit unterzogen, hier ein Werk zu schaffen, das zugleich theoretischen Ansprüchen und den Anforderungen der Nautiker genügt. Die Darstellungsweise macht nicht immer von den neuesten und geeignetsten Hilfsmitteln der Analysis Gebrauch, doch mag dies im Interesse der weiteren Kreise, die an den Ergebnissen interessiert sind, berechtigt erscheinen.

Mises. 47

MÜLLER-POUILLET, Lehrbuch der Physik. 11. Auflage. Erster Band. Herausgegeben von Erich Waetzmann, Breslau. 1. Teil: Mechanik punktförmiger Massen und starrer Körper. Mit 673 Figuren im Text. S. 1—848. 2. Teil: Elastizität und Mechanik der Flüssigkeiten und Gase. Mit 398 Figuren im Text und auf 2 Tafeln. S. 849—1258. 3. Teil: Akustik. Mit 393 Figuren im Text. S. 1—184. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., Braunschweig 1929. Preis: 1. u. 2. Teil zus. geb. 82 M., 3. Teil geb. 32 M.

Die Flut der großen Handbücher nimmt kein Ende. Nachdem das 24bändige des Springerschen Verlags mit drei Mechanikbänden und einem Band Akustik abgeschlossen, von dem speziell der Mechanik gewidmeten, auf nominell sieben Bände berechneten Auerbach-Hort (früher Winkelmann) ein großer Teil erschienen ist, die Wien-Harmssche Experimentalphysik einen Mechanikband herausgebracht hat, tritt nun die neue Auflage des Müller-Pouillet mit zwei umfangreichen Bänden, die die Mechanik behandeln und einem dritten Band Akustik auf den Plan. Zur allgemeinen Charakteristik ist zu sagen, daß die Darstellung sich der physikalischen und nicht der mathematischen Seite der Probleme vorzugsweise zuwendet und daß eine starke Tendenz zur Aufrechterhaltung des Anschlusses an die früheren Auflagen besteht. In weit höherem Maße als die anderen genannten Werke erinnert das vorliegende, namentlich in

dem Abbildungsmaterial an die Lehrbuch-Literatur des vergangenen Jahrhunderts. Freilich hat der neue Herausgeber, E. Waetzmann, sich große Mühe gegeben, durch Gewinnung guter neuer Autoren, die die alten Aufsätze umarbeiteten, für eine Modernisierung zu sorgen. So bringt z. B. G. Berndt-Dresden in dem Kapitel über Maß und Messen manches aus der neuesten Technik. Andererseits erscheint die im dritten Kapitel gegebene Einführung in die Punktmechanik etwas veraltet, jedenfalls reichlich konventionell. Auch in den allgemeinen Sätzen über Bewegung und Gleichgewicht von Punktsystemen in Kapitel IV ist nicht gerade für klare Herausarbeitung des D'Alembertschen Prinzips und dergl. gesorgt, wie dies heute doch schon zu den Selbstverständlichkeiten gehören sollte. Die Mechanik des starren Körpers, von W. Hort bearbeitet, wird durch besondere Ausführungen über den Kreiselkompaß von M. Schuler vorteilhaft ergänzt.

Im zweiten Bande gibt Pöschl eine allgemeine Einleitung in die Elastizitäts-und Festigkeitstheorie und P. P. Ewald eine Uebersicht über die Probleme der Atom-Struktur. Von besonderem Interesse sind die drei Kapitel von L. Prandtl über die Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Sie enthalten eine Darstellung, die in den Grundzügen an die von Prandtl vor längerer Zeit im Handbuch der Naturwissenschaften gegebenen erinnert, natürlich unter weitergehender Ausführung, namentlich der experimentellen Seite. Es versteht sich, daß die eigenen Forschungen Prandtls und die reichen Ergebnisse der Göttinger Schule in besonderem Maße berücksichtigt werden. Daß dabei praktisch wichtige Fragen wie etwa die des Widerstands in zylindrischen Leitungen etwas zu kurz kommen, muß man schon mit in Kauf nehmen. Ueber Wasserkraft-Maschinen, Wasser- und Luftfahrzeuge und über Versuchseinrichtungen der Hydrodynamik und Aerodynamik wird das Wichtigste in entsprechender Form berichtet.

Der Akustik-Band beginnt mit einer elementar gehaltenen Einführung in die allgemeine Wellenlehre und beschäftigt sich dann wesentlich mit den klassischen Aufgaben der experimentellen Klanglehre. Ausführlich werden z. B. die verschiedenen Musikinstrumente behandelt; einiges wenige wird über das menschliche Stimmorgan gesagt. Verhältnismäßig kurz kommen die modernen Probleme, die einerseits durch die Funktechnik, andererseits durch die Aufgaben des Bauwesens angeregt sind, zur Sprache. Namentlich der Raum- und Bauakustik, die in letzter Zeit von vielen Seiten gefördert wurde, hätte etwas mehr Platz als 20 Seiten gegönnt werden sollen.

Im ganzen ist zu sagen, daß die neue Auflage den alten Ruhm des Müller-Pouilletschen Lehrbuchs der Physik gewahrt hat und daß das Buch neben der großen Zahl neuerer Werke auf diesem Gebiet mit Ehren bestehen wird. Mises. 47

Dr.-Ing. H. **NIPPERT,** Ueber den Strömungsverlust in gekrümmten Kanälen. Mit 141 Abb. und 6 Zahlentafeln. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 320. VDI-Verlag, Berlin 1929. II + 67 S. Preis 9 M.

Der Verfasser hat sich die schon oft behandelte Aufgabe gestellt, auf experimentellem Wege zu untersuchen, welchen Verlust an Strömungsenergie eine Flüssigkeit erfährt, sobald sie eine Krümmung innerhalb einer Leitung durchläuft. Leider scheinen die Ergebnisse trotz der auf die Versuche und ihre Auswertung aufgewandten großen Mühe wenig brauchbar, da ein zu kurzes Stück der Leitung vor und hinter dem Krümmer in Betracht gezogen wurde. Wesentlich für die Beurteilung der untersuchten Verluste wäre es gewesen, einen hinreichend langen Zu- und Ablauf vorzusehen, da sonst im Anfang- und End-Querschnitt noch eine Einwirkung des Krümmers auf die Geschwindigkeit- und Druckverteilung vorliegt, wodurch die Ergebnisse in Frage gestellt werden. Mises. 47

Prof. P. **DEBYE,** o. Professor und Direktor des Physikalischen Instituts an der Universität Leipzig. Polare Molekeln. Mit 34 Abb. im Text. Verlag S. Hirzel, Leipzig 1929. VIII + 200 S.

Die Grundlage dieses Buches, das ursprünglich aus Vorträgen hervorgegangen in englischer Fassung erschien, bildet die von dem Verfasser begründete Erkenntnis, daß es im elektrischen Gebiet der Molekularphysik etwas Aehnliches gibt, wie die Erscheinungen, die im magnetischen Gebiet den Paramagnetismus bedingen und sich am stärksten im Ferromagnetismus äußern. Die älteren Theorien konnten zur Erklärung des dielektrischen Verhaltens nur eine quasielastische Verschiebung positiver und negativer Einzelladungen annehmen, die Debye als Polarisation durch Deformation bezeichnet. Dagegen zeigt er insbesondere aus dem Temperaturverlauf der Polarisierbarkeit und ihrer nicht-linearen Abhängigkeit von der Feldstärke (Sättigung), daß auch hier das »Dipolmoment« des neutralen Moleküls als eine wesentliche und meßbare Konstante anzusehen ist und durch seine Orientierung im elektrischen Felde diese Effekte hervorruft.

Auf Einzelheiten soll hier nicht eingegangen werden; es besteht kein Zweifel, daß auch diese Theorie in die erweiterten Gesichtspunkte, die die moderne Mechanik geschaffen hat (vgl. die vorangehende Besprechung), sich einfügen wird, und für diese Aufgabe hat das Buch schon eine Fülle empirischen Materials theoretisch geordnet.

Breslau. F. Noether. 38

Dipl.-Ing. RUDOLF **WINZHEIMER,** Telegraphendirektor im Reichspostzentralamt (Telegraphentechnisches Reichsamt Abt. München). Uebertragungstechnik. Mit 207 Abb. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin 1929. VI + 233 S. Preis 12 M.

Es handelt sich in diesem Buche um die Technik der elektrischen und elektroakustischen Uebertragung von Sprache und Musik, also, um nur das Wichtigste zu nennen, die allgemeinen elektrischen und akustischen Beziehungen, die Theorie der Fernsprechleitung, Verstärkereinrichtungen, Hochfrequenzübertragung. Dabei wird auch die musikalische Seite in instrumentaler sowie individueller Hinsicht gestreift. Das Buch soll als Hilfsmittel beim Unterricht an höheren technischen Lehranstalten dienen und wird wegen seines vielseitigen Inhalts tatsächlich wertvolle Anregungen in diesen aktuellen Fragen geben können, denen, in der Zeit des Rundfunks, auch viele Nichtfachleute Interesse entgegenbringen. Allerdings habe ich den Eindruck, daß gerade das Technische, z. B. die Verstärkertechnik, das dem Verfasser am geläufigsten ist, für weniger erfahrene Leser vielfach in zu knapper Form dargestellt ist, während die mathematischen Teile, die doch nicht über elementare Rechnungen hinauskommen, z. B. in der Theorie der Fernsprechleitung, reichlich breiten Raum einnehmen.

Breslau. F. Noether. 38

TULLIO **LEVI-CIVITA** e UGO **AMALDI,** Lezioni di Meccanica Razionale. Volume primo. Cinematica-Principi e Statica. Zweite, durchgesehene und vermehrte Auflage. Verlag Nicola Zanichelli, Bologna. XIV + 807 S.

Die erste Auflage des aus zwei Teilen bestehenden zweiten Bandes dieses Werkes wurde in dieser Zeitschrift Bd. 8, 1928, S. 157 angezeigt. Das dort ausgesprochene durchaus zustimmende Urteil kann bestätigt werden. Die zweite Auflage des ersten Bandes unterscheidet sich von der ersten durch kleinere Verbesserungen sowie durch einen wesentlichen Zusatz, die Theorie der Fachwerke. Das Buch gliedert sich in zwei Teile. Der erste (Kap. I bis VI) enthält die Kinematik: Vektorrechnung, Kinematik des Punktes, der starren Systeme, der Relativbewegung, weitere Ausführungen über die ebene Bewegung der starren Körper und Allgemeines über die Kinematik der Systeme (holonome und nichtholonome Systeme, einseitige Bindungen). Der zweite Teil (Kap. VII bis XVI) bringt erst die Grundbegriffe Kraft und Masse (den statischen Kraftbegriff mit seinen unvermeidbaren Mängeln), dann die Begriffe Arbeit, Potential und Impuls mit ausführlicher Besprechung der Aehnlichkeitsgesetze, weiter Reibung, Massengeometrie, Newtonsches Anziehungsgesetz, Reaktionsprinzip. Danach (Kap. XIII) die Statik des starren Körpers, Statik der Körperketten, der Fäden und der Stäbe, Prinzip der virtuellen Arbeiten und allgemeine Statik, endlich im letzten Kapitel relatives Gleichgewicht. Den Schluß bildet ein ausführliches Namen- und Sachverzeichnis.

Zwei Bemerkungen hätte der Referent noch zu machen. Im Prinzip der virtuellen Arbeiten wird die Reibung ausdrücklich ausgeschlossen, was nicht nötig ist. (Man muß nur die Haftreibung als Reaktionskraft, die Gleitreibung als eingeprägte Kraft nehmen.) Und von den Kräften, mit denen zwei Punkte aufeinander wirken, wird gesagt, sie befänden sich im Gleichgewicht, eine für den Anfänger sehr gefährliche Ausdrucksweise, die bekanntlich auch Nichtanfängern verhängnisvoll geworden ist; natürlich nicht den Autoren dieses klaren Werkes, in dem die Unterschiede zwischen inneren und äußeren Kräften einerseits, zwischen eingeprägten und Reaktionskräften andererseits sorgfältig auseinandergehalten werden.

Berlin. G. Hamel. 50

Dr.-Ing. K. **KAMMÜLLER,** Privatdozent an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Die Theorie der Gewichtsstaumauern unter Rücksicht auf die neueren Ergebnisse der Festigkeitslehre. Mit 25 Textabbildungen. Springer, Berlin 1929. VI + 60 S. Preis 5,40 M.

Diese beachtenswerte Broschüre bildet eine Darstellung der heute üblichen Methoden der statischen Berechnung von Gewichtsstaumauern. Die Mauerprofile weichen in der Regel wenig von einem Dreieck ab und es wird daher von einem »Grunddreieck« gesprochen, bei dem der Wasserspiegel bis zur Dreieckspitze reicht. Die Wasserseite ist lotrecht oder hat einen kleinen Anzug. Die einzige unbekannte äußere Kraft ist der Unterdruck. Hier wird für den Unterdruck ein linearer Verlauf angenommen, an der Luftseite gleich null und seine Größe wird nach neueren Forschungen aus dem Porigkeitsgrad des Mauerkörpers bestimmt. Die Spannungsberechnung wird nach dem »Trapezgesetz« durchgeführt, d. h. mit einer linearen Verteilung der Normal- und Schubspannungen in einer Fuge. Nur für das Grunddreieck ist das exakt richtig, für die Zusatzbelastungen (Kronenlast, Wasserzusatzlast, Eisdruck) wird es hier auch angewendet, mit um so mehr Berechtigung, je weniger das Profil vom Grunddreieck abweicht. Als Beispiel sind an der 65 m hohen Schwarzenbachsperre die Hauptnormal- und Hauptschubspannungen der Fundamentfuge für alle Belastungsfälle berechnet und die Spannungstrajektorien sowie Kurven gleicher Anstrengung (unter Zugrundelegung der Mohrschen Bruchtheorie) aufgezeichnet. Für die erforderliche Entfernung der Dehnungsfugen bei Betonmauern gibt der Verfasser nach schätzungsweisen Rechnungen den Wert 0,42 der Mauerhöhe an.

Breslau. J. Ratzersdorfer. 53

Dr.-Ing. H. **MARCUS,** Vorstandsmitglied der HUTA Hoch- und Tiefbau-Akt.-Ges., Breslau. Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 65 Abb. im Text. Verlag Springer, Berlin 1929. 126 S. Preis 9 M, geb. 11 M.

Die zweite Auflage des Buches weist gegenüber der ersten Auflage, die in dieser Zeitschrift besprochen wurde[1]), einen vergrößerten Inhalt auf. In einem Abschnitt sind jetzt die Drillungsmomente der gleichförmig belasteten Platten ausführlich untersucht und Näherungs-

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 6 (1926), S. 420.

formeln für ihre Berechnung angegeben. Dann wird in einem Abschnitt die Dimensionierung der drillungsfesten kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten behandelt. Vorausgesetzt ist, daß die Spannungsmomente so wie für eine isotrope Platte bestimmt werden können. Es werden Ersatzmomente eingeführt, d. s. fiktive Biegungsmomente, mit denen die Wirkung der Drillungsmomente berücksichtigt werden soll. Es gibt dabei verschiedene Möglichkeiten. H. Marcus bestimmt zwei Kräftepaare, deren zugehörige Momente in den Querschnitten der Hauptspannungsmomente mit den wirklichen Hauptspannungsmomenten übereinstimmen. Eine andere abgeleitete Formel, bei der die Ersatzmomente vom Maschenverhältnis der Armierung abhängig sind, ist nicht ganz überzeugend. Dem Eisenbetoningenieur wird das Buch dazu helfen, die in den Bestimmungen des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton angegebenen Formeln über die Berechnung von kreuzweise bewehrten Platten nicht nur mechanisch anzuwenden.

Breslau. J. Ratzersdorfer. 53

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Prof. Dr. LUDWIG **ECKHART,** Privatdozent an der Techn. Hochschule Wien. Der vierdimensionale Raum. Mit 29 Textfiguren. Mathem.-Physikal. Bibliothek Nr. 84. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1929. 54 S. Preis kart. 1,20 M.

K. **v. KÖRÖSY,** Versuch einer Theorie der Genkoppelung. Bibliotheca Genetica, Bd. XV. Mit 47 Textabbildungen. Verlag Gebr. Bornträger, Leipzig 1929. XII + 272 S. Preis 40 M geh.

G. H. A. Kröhnkes Taschenbuch zum Abstecken von Bögen bei Bahnen, Kanälen und Wegen. Siebzehnte Auflage. Bearbeitet von R. Seifert, Direktor und Professor in Berlin. Mit 21 Abb. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1929. V + 133 S. Preis geb. 4,60 M.

Dr.-Ing. WALTHER **KAUFMANN,** o. Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover. Statik der Tragwerke. Zweite verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 368 Textabbildungen. Handbibliothek für Bauingenieure. IV. Teil: Brücken- und Ingenieurhochbau. 1. Bd. Verlag Springer, Berlin 1930. VIII + 322 S.

Dr. MAX **BORN,** Professor an der Universität Göttingen, und Dr. PASCUAL **JORDAN,** Professor an der Universität Rostock, Elementare Quantenmechanik. (Zweiter Band der Vorlesungen über Atommechanik.) Struktur der Materie in Einzeldarstellungen. IX. Verlag Springer, Berlin 1930. XI + 434 S. Preis 28 M, geb. 29,80 M.

Mitteilungen aus dem Mechanisch-Technischen Laboratorium der Technischen Hochschule München. Dritte Folge, herausgegeben von LUDWIG **FÖPPL.** Der ganzen Reihe 34. Heft. Mit 10 Tafeln in Steindruck und 2 Autotypietafeln. Verlag Theodor Ackermann, München 1930. IV + 40 S. Preis 13,50 M.

ERNST ADOLF **BERNHARD,** Philosophische und naturwissenschaftliche Grundlagen der Psychologie. Bibliothek für Philosophie, 32. Bd. Carl Heymanns Verlag, Berlin 1930. 123 S. Preis 8 M.

MARTIN **GRÜBLER,** Dr. phil. h. c., Dr. art. ing. h. c., ord. Prof. i. R. d. Techn. Hochschule Dresden. Was ist Gewicht? Verlag Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig 1930. 32 S.

NACHRICHTEN

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

Am 16. Mai spricht Hr. Prof. Schnadel-Berlin über »Knickung von Blechen«.

Prager Mitglieder.

Am 27. Februar sprach Hr. Dr. Wilhelm Müller-Prag »Ueber die asymptotische Strömung von Oseen-Zeilon«.

III. Internationaler Kongreß für Technische Mechanik: 24. bis 29. August 1930 Stockholm. Zur Teilnahme am Kongreß haben sich bisher rd. 300 Personen und Gesellschaften angemeldet. Die Verhandlungen werden Montag, den 25. August um 10 Uhr vormittags beginnen. Das Internationale Kongreßkomitee versammelt sich schon vorher, Sonntag den 24. August um 14 Uhr nachmittags im Rektorzimmer der Technischen Hochschule.

Folgende allgemeine Vorträge sind für den Kongreß in Aussicht genommen:

Bairstow, L., London: Propellertheorie.
Eisner, F., Berlin: Das Widerstandsproblem.
Michel, E., Hannover: Raumakustik.
v. Mises, R., Berlin: Die bisherigen Ansätze in der klassischen Mechanik der Kontinua.
Oseen, C. W., Uppsala: Das Problem der Turbulenz.
Timoshenko, S., Ann Arbor: Die Stabilität und Stärke dünnwandiger Konstruktionen.
Weibull, W., Stockholm: Die Bruchgrenze.
Panetti, M.: Automobilschwingungen (Schwingungen bei Fahrzeugen und Fuhrwerken).

Die schwedischen Eisenbahnen gewähren den Kongreßteilnehmern 25prozentige Ermäßigung der Fahrkartenpreise unter der Voraussetzung, daß die Reise in Gruppen von mindestens 20 Personen erfolgt. Die Geschäftsstelle des Vereines deutscher Ingenieure, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, hat es übernommen, Reisegesell-

schaften zusammenzustellen und eventuell Verhandlungen wegen Fahrpreisermäßigungen innerhalb Deutschlands zu führen. Teilnehmer, welche auf Gesellschaftsreisen Wert legen, wollen sich an diese Geschäftsstelle wenden.

In allen den Kongreß betreffenden Angelegenheiten erteilt der Generalsekretär Prof. Weibull, Stockholm, Technische Hochschule, Auskunft. Telegrammadresse: Mekanikkongressen, Stockholm.

Persönliches. Herrn Dr. Alfred Basch, Oberbaurat im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, wurde die venia legendi als Privatdozent an der Technischen Hochschule in Wien auf »Praktische Mathematik« erweitert.

Herr Zivilingenieur Dr. Julius Ratzersdorfer, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Breslau, ist zum n. b. a. o. Professor ernannt worden.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Versuche zur Ermittlung der Vertikalspannungen beim Walzvorgang. (Diese Zeitschr. Bd. 9 (1929), S. 454). Von K. Huber wurde der Versuch gemacht, die beim Walzen auftretenden Vertikalspannungen in folgender Weise zu ermitteln. Es wurde der Walzdruck während des Einlaufs eines Stabes in den Walzspalt als Funktion der Zeit aufgenommen. Die so erhaltenen Druck-Zeit-Diagramme wurden in Druck-Weg-Diagramme umgewandelt, indem die Austrittsgeschwindigkeit des Walzgutes der Umfangsgeschwindigkeit der Walzen gleichgesetzt und die an jeder anderen Stelle des Walzspaltes im Abstande x vom Walzenaustritt herrschende Geschwindigkeit der Stabteile aus der Volumenkontinuität beim Walzvorgang berechnet wurde. Durch Bildung des Differenzquotienten $\frac{dP}{dx}$ und Division durch die jeweilige Breite b soll alsdann die Vertikalspannung

$$\sigma_y = \frac{dP}{b \cdot dx}$$

sich errechnen lassen.

Bereits die Umwandlung der Druck-Zeit-Kurven in Druck-Weg-Kurven erscheint bei diesem Verfahren nicht einwandfrei. Beim Erfassen der Stabspitze erhält das Walzgut eine Geschwindigkeit, die der Horizontalkomponente der Umfangsgeschwindigkeit der Walzen an dieser Stelle entspricht. Wenn man von der geringfügigen Voreilung absieht, läßt sich die Geschwindigkeit der Stabspitze während des ganzen Durchgangs durch den Walzspalt als jeweilige Horizontalkomponente der Umfangsgeschwindigkeit berechnen. Die von Huber angewendete Umrechnungsart (s. o.) wäre nur am Platze, wenn es sich nicht darum handelte, die Geschwindigkeit der Stabspitze, sondern eines beliebigen Querschnittes zu berechnen, nachdem der Stab bereits beginnt, aus dem Walzspalt wieder auszutreten, und nachdem sich also stabile Verhältnisse im Walzspalt ausgebildet haben.

Ist also die Ermittlung der Druck-Weg-Kurve bereits als nicht einwandfrei zu beanstanden, so erscheint die Berechnung der Vertikalspannungen aus dem Kurvenverlauf in der vorgeschlagenen Weise (s. o.) als völlig abwegig. Eine solche Rechnungsweise wäre nur zulässig, wenn während des Eindringens der Stabspitze die Vertikalspannung an dieser Spitze in jedem Punkte des Walzspaltes derjenigen entsprechen würde, die dort während des weiteren Durchwalzens, also nach Erreichung des stabilen Zustandes herrscht. Das ist aber keineswegs der Fall, da sich während des Einziehens der Spannungszustand im Walzspalt ständig ändert. Die Unzulässigkeit des ganzen Verfahrens geht auch daraus hervor, daß an der eigentlichen Stabspitze während des Einziehens die Vertikalspannung nur wenig von der Fließspannung abweichen kann, da hier ja keine Querspannungen aufzutreten vermögen.

Aus den angegebenen Gründen entspricht die von Huber ermittelte Spannungsverteilung keineswegs der wirklichen. Es sind jedoch noch Einwendungen prinzipieller Natur gegen den in der Arbeit angenommenen Verlauf der Vertikalspannungen im Walzspalt zu machen. Insbesondere ist hier zu beanstanden, daß am Walzenaustritt ein Absinken der Vertikalspannungen auf Null angenommen wird. Huber hat dabei nicht berücksichtigt, daß beim Einziehversuch der Walzdruck nicht etwa dann bereits seinen Höchstwert erreicht, wenn die Stabspitze bis zum Walzenaustritt vorgedrungen ist, sondern erst etwas später, da die unmittelbar hinter dem Walzspalt liegenden Stabteile auch noch einen Teil des Walzdruckes mit übernehmen. Erst hinter dem Walzspalt fällt die Vertikalspannung also gewissermaßen auf Null ab, während sie im Walzspalt selbst überall zum mindesten die Größe der Quetschfestigkeit besitzt. Es erhellt daraus, daß Huber auch den Walzenaustrittspunkt in seinen Diagrammen nicht richtig erkannt hat.

Da die zugrunde liegenden Versuchsauswertungen falsch sind, sind sämtliche, von Huber aus seinen Versuchen gezogenen Schlüsse unzulässig. Insbesondere entfällt jegliche Stützung der Dresdenschen Theorie, daß die Quetschfestigkeit bei der Warmformgebung von Metallen ausschließlich eine Funktion der Formänderungsgeschwindigkeit ist. Ueber die Lage der Fließscheide oder des Haftpunktes geben die angeführten Diagramme kein richtiges Bild, noch viel weniger über den Spannungsverlauf im Walzspalt überhaupt.

Aus den vorstehenden Einwänden erhellt, daß die experimentelle Ermittlung der Spannungsverteilung im Walzspalt auf weit größere Widerstände stößt, als sie von Herrn Huber angenommen wurden. Durch derartige Einzieh- oder Auslaufsversuche läßt sich höchstens ein

Ueberblick über die mittlere Größe der Vertikalspannung im Walzspalt in verschiedenen Stadien des Einziehens bzw. Auslaufens gewinnen, indem die Kraft durch die jeweilig mit den Walzen in Berührung stehende Fläche dividiert. Aus dem Verlauf der mittleren Spannungen lassen sich alsdann auch Rückschlüsse auf die wirkliche Spannungsverteilung im Walzspalt ziehen, wenn man berücksichtigt, daß die Vertikalspannung am Walzeneintritt und -Austritt etwa gleich der Quetschfestigkeit ist, und daß der Gesamtverlauf der Vertikalspannung der mittleren Spannung entsprechen muß. Besser ist es vielleicht, den Verlauf der mittleren Vertikalspannung bei veränderlicher Stichabnahme zu untersuchen, da so das Mittragen der Nachbarschichten am Walzeneintritt und -Austritt berücksichtigt wird. Vom Verfasser wurden Versuche dieser Art durchgeführt, die einen Ueberblick über die Aenderung des mittleren Formänderungswiderstandes beim Warmwalzen von Stahl in Abhängigkeit von der Stichabnahme und der Walztemperatur geben[1]. Der geringe Einfluß der Stichabnahme auf die Höhe des Formänderungswiderstandes bei Temperaturen über 1000° weist dabei darauf hin, daß die Abweichungen des Druckverlaufs von der Quetschfestigkeit weit geringer sind, als sie von Huber angenommen werden.

Wenn Herr Huber zu Beginn seiner Erörterungen auf die sogenannte v. Kármánsche Theorie des breitungslosen Walzvorganges eingeht, so möchte ich bei dieser Gelegenheit darauf hinweisen, daß der genannte Ansatz nämlich

1. Aufstellung der Gleichgewichtsbedingung für das Volumenelement in der x-Achse,
2. Einführung der Plastizitätsgleichung $q-p=k$,
3. Annahme zweier getrennter Kurvenäste für das Abfließen des Werkstoffes zum Walzeneintritt bzw. zum Walzenaustritt,

von mir bereits am 10. Mai 1924 in einer vom Verein Deutscher Eisenhüttenleute einberufenen Sitzung in Hagen, an der Herr v. K. teilnahm, bekanntgegeben worden ist. Obiger Ansatz wurde von mir damals auch bereits zum Berechnen der Voreilung beim Walzen benutzt. Wenn Herr v. Kármán bei der Weiterentwicklung meines Ansatzes in seinem »Beitrag zur Theorie des Walzvorganges« (1925) meine Ausführungen nur als eine ihm in Hagen zuteil gewordene Anregung erwähnt, so dürfte das darauf zurückzuführen sein, daß die Veröffentlichung meines Vortrages in »Stahl und Eisen« erst Ende 1925 erfolgte[2]. Bei dieser Sachlage dürfte mein Anspruch auf die Priorität in dieser Angelegenheit nicht in Frage stehen.

Düsseldorf-Clausthal. E. Siebel. 56

[1]) Mitt. K. W. Inst. f. Eisenforschung, demnächst.

[2]) E. Siebel: Kräfte und Materialfluß bei der bildsamen Formänderung. »Stahl und Eisen« Bd. 45 (1925), S. 1563.

* * *

Erwiderung auf Herrn E. Siebels Einwände. Ich habe auf die Voraussetzungen, unter denen die Versuchsergebnisse zu betrachten sind, im letzten Absatz der Einleitung ausdrücklich hingewiesen.

Die prinzipielle Uebereinstimmung des aus der Druckkurve ermittelten Verlaufes der Vertikalspannungen mit der m. W. erstmaligen Veröffentlichung des theoretischen Verlaufes der σ_y von Prof. Dr. v. Kármán[1]) in dieser Zeitschr. im April 1925 schien mir ein Ergebnis zu sein, das zur Veröffentlichung der Versuchsergebnisse berechtigte, um so mehr, als der Gegenstand wegen der Berechnung der reinen Umformungsarbeit beim Walzen die Walzwerker seit der im Jahre 1874 erfolgten Veröffentlichung der Finkschen Formel für die Walzleistung[2]) interessiert und bereits früher[3]) und zuletzt wieder in dieser Zeitschr.[4]) die Anregung gegeben wurde, durch experimentelle Forschung zur Klärung der Frage beizutragen.

Der Abfall der σ_y zum Nullwert an der Austrittsstelle ergibt sich aus dem horizontalen Verlauf der Vertikaldruckkurve, der in dem Augenblick beginnt, in dem die Querschnittsfläche des Stabanfanges die Austrittsstelle des Walzenspaltes erreicht. Die aus dem Verlauf der Druckkurve, deren Anfangs- und Endpunkt deutlich erkennbar waren, gemessene Durchflußzeit stimmt mit der errechneten gut überein; es konnte daher auf Grund der Meßergebnisse kein anderer Schluß gezogen werden, als daß σ_y an der Austrittsstelle Null ist.

Der Dresdensche Ansatz der Plastizitätsgleichung[5]) ist mir erst bekannt geworden, nachdem die Versuche bereits ausgewertet waren. Der Hinweis auf die Uebereinstimmung des Meßergebnisses mit der Theorie erschien mir selbstverständlich, dies um so mehr, als die Gültigkeit von $\sigma_y - \sigma_x = 2\,\tau_{\max}$[6]) im Gebiet starker plastischer Formänderung nicht allgemein anerkannt wird.

Ich lese im Satze »jegliche Stützung der Dresdenschen Theorie« das Wort »Stützung« als Synonym für »Uebereinstimmung«. Jede andere Art Stützung ist mir ferne gelegen.

Ich möchte nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, daß die in der Abhandlung wiedergegebenen σ_y-Kurven zu Versuchen mit ungewöhnlich großen, einstichigen Höhenabnahmen

[1]) Daher die Bezeichung »v. Kármánsche Theorie«.

[2]) C. Fink, Theorie der Walzen-Arbeit; Zeitschrift für das Berg-, Hütten- und Salinenwesen in dem preußischen Staate, 1874.

[3]) Walzwerksausschuß, Bericht Nr. 28, vom 24. Juni 1922; auf S. 14 der Hinweis Rummels auf die Notwendigkeit praktischer Versuche.

[4]) April 1926, S. 176 von D. Dresden.

[5]) Diese Zeitschr. Bd. 6 (1926), S. 176.

[6]) Diese Zeitschr. Bd. 6 (1926), S. 174; Siebel: »Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß das Mohrsche Gesetz in der Form der Gl. (2) auch nur eine grobe Annäherung an die Spannungs-Formänderungskurve bedeutet.

gehören, mit denen gearbeitet wurde, um den Charakter des σ_y-Verlaufes möglichst ausgeprägt zu bekommen; dadurch ergeben sich die großen Unterschiede zwischen der Spannung am Eintritt ins Umformungsgebiet und dem Spannungshöchstwert.

Witkowitz, am 1. Februar 1930.

K. Huber. 56a

* * *

Erwiderung. Aus den Bemerkungen des Herrn Siebel über »die sogen. Kármánsche Theorie des Walzvorganges« könnte der Leser schließen, daß ich durch meinen in dem Jahrgang 1925 dieser Zeitschr. erschienenen Aufsatz »Beitrag zur Theorie des Walzvorganges« in unerlaubter Weise seine Entdeckung, die er im Mai 1924 bei einem Vortrag in Hagen zur Kenntnis gebracht hat, vorweggenommen habe. Hierzu möchte ich folgendes bemerken: Im Mai 1924 nahm ich auf Aufforderung einiger führenden Leute vom Verein Deutscher Eisenhüttenleute an einer Ausschußsitzung teil, die den Problemen der Plastizität im Hinblick auf die praktisch wichtigen Fragen gewidmet werden sollte. Bei dieser Gelegenheit sind eine Reihe von Vorträgen gehalten worden, von denen ich allerdings sehr wenig verstanden habe. Es schien mir, daß die Vorgänge gar nicht so kompliziert sind wie die Reden, die darüber gehalten worden sind. Unter diesen Reden zeichnete sich ein Vortrag des Herrn Siebel durch relative Verständlichkeit aus und man konnte daraus entnehmen, daß der Vortragende der Ansicht war, man könnte mit Hilfe der bekannten Ansätze der Plastizität eine angenäherte Theorie des Walzvorganges ausbilden, wenn man die Längsspannungen über die einzelnen Querschnitte des Walzgutes durch Mittelwerte ersetzt. An diese Bemerkung, die mir als eine allererste Annäherung ganz vernünftig schien, schloß sich eine m. E. nicht ganz richtige Berechnung der Voreilung an. Ich merkte nun, daß unter dieser vereinfachenden Annahme sich die Berechnung der Kraftverteilung auf die Walzen auf eine einfache Differentialgleichung zurückführen läßt, die man in expliziter Weise lösen kann. Ich habe diese einfache Berechnung in aller Bescheidenheit in einer kurz darauf stattfindenden Versammlung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik vorgetragen, wobei ich bemerkte, daß ich die Anregung zu dieser Rechnung in jener Sitzung in Hagen erhalten hatte. Das eigentliche Verdienst des Herrn Siebel, das ich ihm gerne zuerkenne, besteht in der, allerdings sehr groben, aber zur allerersten Annäherung vielleicht nicht gar zu schlechten Annäherung, daß man die Längsspannungen durch einen Mittelwert ersetzt. Daß ich für die drei Aussagen, die Herr Siebel in seiner Zuschrift erwähnt, doch nicht die Hilfe des Herrn Siebel gebraucht habe, darf ich wohl voraussetzen. Punkt 1 gehört in die elementare Mechanik. Punkt 2 ist die allgemein bekannte Grundlage der Plastizitätstheorie, zu deren Ausbau, wenn mein Gedächtnis nicht täuscht, vor etwa 20 Jahre auch ich einiges beigetragen habe. Was Punkt 3 anbelangt, d. h. die Existenz zweier getrennter Aeste für die Verteilung, so kann ich darin auch keine große Entdeckung sehen, weil es doch selbstverständlich ist, daß, wenn ein Teil des Walzgutes rascher, ein anderer Teil langsamer als die Walze sich bewegt, die Reibung ihr Vorzeichen ändern muß, wodurch naturgemäß zwei unstetige Aeste für die Kraftverteilung entstehen.

Zusammenfassend möchte ich daher bemerken, daß ich keineswegs verlange, daß die elementare Rechnung, die ich in jenen drei Seiten mitgeteilt habe, als »Kármánsche Theorie des Walzvorganges« bezeichnet wird; andererseits aber scheint es mir, daß aus dem Vortrag bzw. aus der später gedruckten Arbeit des Herrn Siebel nicht mehr als eine Anregung geschöpft werden kann, was ich auch bemerkt habe, während meine Rechnung doch immerhin einen unmittelbaren Vergleich mit den Versuchen und eine Diskussion des Einflusses der verschiedenen Parameter ermöglicht.

Was die sehr anerkennenswerte Arbeit des Herrn Huber anbelangt, möchte ich doch bemerken, daß ich im Gegensatz zu Herrn Siebel den Eindruck habe, daß mein Ansatz, oder wenn Herr Siebel will, der Siebelsche Ansatz, das wesentliche an den Vorgängen wenigstens bei verhältnismäßig schnell laufenden Walzen nicht wiedergibt, daß vielmehr die Formänderungsgeschwindigkeit eine überwiegende Rolle spielt. Ich habe vor einigen Jahren durch einen Doktoranden den Walzvorgang durchrechnen lassen, in dem die Plastizitätsgrenze des Materials als Summe eines konstanten und eines mit der Formänderungsgeschwindigkeit proportionalen Anteiles angesetzt wurde. Der betreffende Herr konnte leider die Rechnung nicht bis zu Ende führen. Ich werde mir indessen gestatten, die gewonnenen Teilergebnisse gelegentlich mitzuteilen.

Aachen. Th. v. Kármán. 56b

* * *

Schlußwort. Herr Siebel bemerkt, nach Kenntnisnahme der vorstehenden Aeußerungen des Herrn v. Kármán, daß er die bessere mathematische Behandlung seines Ansatzes durch Herrn v. Kármán nie bestritten habe. »Was die Richtigkeit des Ansatzes angeht, so vermag hier m. E. nur der exakte Versuch zu entscheiden, welche Annahmen zulässig sind. Beim Kaiser-Wilhelm-Institut für Eisenforschung sind bereits in dieser Richtung gehende Untersuchungen in die Wege geleitet.«

Der Herausgeber sieht damit die Diskussion über diese Angelegenheit als geschlossen an.

(Redaktionsschluß 22. April 1930.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7.
Druck von A. W. Schade G. m. b. H., Berlin N 65.